16

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ

PAULINI A S. JOSEPHO

L U C E N S I S

Cler. Reg. Schol. Piar. & in Archigymn. Romano Eloquentiæ Professoris

C U M

PRAXEΩN CHRONOLOGICARUM.

A P P E N D I C E.

Editio Prima Veneta accuratior & emendatior.

V E N E T I I S, MDCCLXI.

Apud Simonem Occhi

SUPERIORUM PERMISSU, ET PRIVILEGIO.

AD LECTOREM.

PAuci sunt, qui de Arithmetica recte judicent. Ea plerisque vilescit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expensique tabulas conficiunt, artem esse putent. At longe aliter de illa viri sapientes judicarunt. Plato quidem in Epinomi de affirmat, sine Arithmetica neque ullam scientiam, neque ipsam hominum societatem posse consistere. Aristoteles autem existimabat, tam proprium esse hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Augustinus, qui frequentissime suis in libris, præsertim vero de Doctrina Christiana, præclare de Arithmetica loquitur, multisque exemplis ostendit, ob numerorum inscitiam, plurima in sacris litteris ignorari? In eadem prorsus sententia fuerunt D. Hieronymus, ex *lib.* 2. contra Jovinianum, aliisque ex locis palam est; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui D. Basilium præceptorem suum summis laudibus celebrat, quod is numerorum scientia ad

 sacræ

ſacræ ſcripturæ intelligentiam, aliaſque diſciplinas ſibi viam muniviſſet. Illud certe negari non poteſt, ab iis, qui Arithmeticæ ſtudia contemnunt, Geometriæ quoque, ac veræ Phyſicæ ſtudia, hoc eſt diſciplinarum omnium ſuccum & ſanguinem, contemni oportere: cum fieri non poſſit, ut hæc, quæ mirabili quodam ordine ac proportione inter ſe cohærent, ſine ſcientia numerorum intelligantur. Quis enim ſine calculis comprehendat motus quantitatem ac leges, quadrata temporum, triplicatas corporum ſimilium rationes, reſiſtendi vires, ſonorum velocitates, liquidorum æquilibria, ac ſexcenta alia, quibus non intellectis, naturalem omnem ſcientiam eum latere neceſſe eſt? Itaque non immerito Plato in *lib. 7. de Rep.* Arithmeticam vocat veſtibulum ſcientiarum, quod ſcilicet numerorum tractatione ſpeculationibus difficilioribus animus aſſueſcit, & ad reliquos ſcientiæ ſatus excipiendos mirum in modum præparatur. Imo ex ipſa numeri vi fauſtum ad ceteras diſciplinas progreſſum auguratur. *Homines*, inquit, *natura Arithmetici ad omnes doctrinas acuti videntur*. Hinc eſt, quod multi in omni memoria viri doctiſſimi in ordinandis illuſtrandiſque Arithmeti-

meticæ elementis desudarunt, quod eorum utilitatem summamque necessitatem probe nossent. Ex præclaris eorum inventis ego triginta & amplius ab hinc annis ea decerpsi in usum studiosæ Juventutis Collegii Nazareni, quæ magis ad Juvenum ingenium apta, & ad Matheseos studia necessaria esse judicavi. Semper enim illis viginti & uno annis, quibus nobiles ejusdem Collegii adolescentes in Mathematicis disciplinis instituti, Arithmeticæ studium præmisi, cujus ope tum II., tum V. & VI. Elementorum Euclidis propositiones facile ab illis percipi experientia comperi, contra vero Arithmetica destitutos in ipsis diu multoque labore versari. Cum autem decursu temporis in ea scripta per manus tradita multa menda, ut fieri solet, irrepsissent, multoque labore ac tempore in illis transcribendis opus esset, res non inutilis visa est, illa typis emittere; eaque occasione adjecta est doctrina de natura atque usu Logarithmorum; tum etiam nonnulla alia, quæ ad quæstiones aliquot Arithmeticæ practicæ pertinent, quæ sane in vita civili haud semel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præ-

 cepti

cepti brevitate, & exemplorum copia satis claræ esse videntur, accedunt quoque demonstrationes, quales in hujus scientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propositionem citare, aut supponere, opportunum visum est. Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam & vulgarem putavi: demonstrationes autem adhibere ex Euclidis elementis VII., VIII., & IX., vel etiam ab Analyseos speciosæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti nostræ rem immaturam. An vero in medio constiterim, sapientum esto judicium.

JO-

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE.

Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Scholar. Piar.

PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUM librum, cui titulus *Institutiones Arithmeticæ &c.* a P. Paulino a S. Joseph assistente Generali Scholarum Piarum duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, atque approbaverint, ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus nostris Scholarum Piarum apud Sanctum Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE
PRÆP. GENERALIS.

Laurentius a S. Hyacintho Secr.

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di revisione ed approvazione del P. F. Serafino Maria Maccarinelli Inquisitore del S. Ufizio di Venezia nel Libro intitolato *Institutiones Arithmeticæ Paulini a S. Josepho Lucensis Cleric. Reg. Schol. Editio altera, cui accedit Praxeon Chronologicarum Appendix*, non v' esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimenti per attestato del Segretario Nostro niente contro i Principi, e buoni costumi; concediamo Licenza a *Simone Occhi Stampatore di Venezia*, che possi esser stampato, osservando gli ordini in materia di stampe, e presentando le solite copie alle pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Data li 21. Luglio 1761.

(Angelo Contarini Proc. Rif.
(
(Francesco Morosini 2. Cav. Proc. Rif.

Registrato in Libro a carte 92. al num. 286.

Giacomo Zuccato Segretario.

A dì 24. detto.
Registrato appresso gli Eccellentissimi Esecutori contro la bestemmia.

Gio: Pietro Dolfin Segretario.

IN-

INDEX

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

CAPUT II.

De Calculo Denominatorum.

CA-

CAPUT III.

De Calculo Fractorum.

CAPUT IV.

De Fractionibus Decimalibus.

Prop.

CAPUT V.

De extractione Radicum.

CAPUT VI.

De Regulis Arithmeticis.

CAPUT VII.

De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

De

De Progressionibus Geometricis.

CAPUT VIII.

De Logarithmis, eorumque natura, atque usu.

Prop.

APPENDIX

Praxeon Chronologicarum.

Prax.

IN-

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

DEFINITIONES.

I. ARITHMETICA est scientia numerorum, cujus partes sunt quatuor: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*.

II. *Unitas* est denominatio, per quam aliqua res dicitur una.

III. *Numerus* est unitatum multitudo; proinde unitas non est numerus, sed numeri principium, sicuti punctum est principium lineæ.

IV. *Numeri simplices* sunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, His additur cyphra 0, quæ per se nihil significat, sed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.

V. *Numeri compositi* sunt numeri majores denario, incluso ipso denario, scilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.

VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor metitur majorem, hoc est cum minor aliquoties sumptus majori æqualis fit; seu cum major minorem aliquoties præcise continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2, sexies sumptus æqualis fit ipsi 12; seu quia 12 sexies præcise continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri est, quæ numerum

metitur, pars *aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4 dicuntur pars aliquota numeri 12; at vero 5 pars aliquanta ipsius, quia aliquoties sumpta vel ipsum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter se primi sunt*, quos nulla communis mensura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* est habitudo, seu ratio quædam unius numeri ad alterum, secundum quod unus alterius est multiplex, vel pars, seu partes, sic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, seu semissis, 3 ad 9 rationem tertiæ partis &c.

X. *Numeri homogenei* sunt illi, quorum unitates eandem rem signiacant.

XI. *Numeri heterogenei*, seu *denominati* sunt, qui variis nominibus denominantur, hoc est res diversas significant, ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri* alii sunt *integri*, alii *fracti* qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, seu unitatis, de quibus in Cap. III.

Schol. *Has notas* Arithmeticas, *antiquis prorsus incognitas, in Hispaniam Mauri deportarunt; inde in Galliam, aliasque Europæ gentes induxit seculo* X. *Gerbertus Monachus Aureliacensis, vir doctus, qui postea fuit Pontifex Silvestri II. nomine.*

CA-

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Dati numeri valorem exprimere.

I. Sit exprimendus numerus datus *A*. Dividatur in periodos, secernendo virgula ternas quascunque figuras, incipiendo a dextera; divisus erit numerus *A* in tres periodos, seu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas; sed prima dextrorsum continet unitates, decades, & centenas simpliciter; secunda vero continet unitates, decades, & centenas millium; tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

A 394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo sinistrorsum, & progrediendo versus dexteram sic: tercenti nonaginta quatuor milliones, octingenta septuaginta quinque millia, quadringenta sexaginta duo. Similiter numerus *B* divisus, ut superius dictum est, dicit centum viginti quatuor milliones, & duo millia

B 124, 002, 000.

Demum numerus *C* exprimit milliones 100.

C 100, 000, 000.

 II. Pro

II. Pro numeris prolixioribus exprimendis ita procedes. 1. Datus numerus eodem modo per virgulas distribuatur in membra, ut superius factum est. 2. Super notam primam dextrorsum ponatur una cyphra o, intermissisque quinque figuris, supra notam septimo loco positam ponatur unitas 1. Item post quinque iterum notas scribatur 2, atque ita deinceps, relictis semper quinque notis, scribatur 3, 4, 5 &c. Quodlibet membrum continet sex notas; (praeter primum ad sinistram, quod aliquando continere potest 2, 3, 4, aut 5 notas). Exprimendae sunt igitur simul sex illae notae; prolataque integra periodo, toties repetenda est vox haec *millio*, quot sunt unitates, quae continentur supra primam notam talis periodi. Virgulae autem appositae *millia* significant; ut exemplis sequentibus *D*, & *E* facile intelligitur.

$$D\; 52,\overset{2}{}329,\; 1\overset{1}{8}9,\; 602,\overset{0}{8}00$$

Quinquaginta duo milliones millionum, tercentum viginti novem millia, centum octoginta novem milliones, sexcenta duo millia, octingenta.

$$E\; 45,\overset{8}{9}28,\; 634,\overset{6}{4}26,\; 350,\overset{1}{8}72,\; 385,\overset{0}{1}73$$

Quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo milliones millionum millionum, sexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti sex milliones millionum, tercenta quinquaginta millia, octingenti septuaginta duo milliones, trecenta octoginta quinque millia ac centum septuaginta tres.

Schol. *I. Si cui molestum sit iterare toties vocem illam* millionum, *utatur hoc compendio: Ubi pronuncianda est vox millionum bis, dicat* bilionum:

ubi

ubi ter, *dicat* trillionum; *ubi quater*, quadrilionum *&c. adeoque ſuperius exemplum efferri poteſt ſic: quadraginta quinque millia*, *nongenti viginti octo* triliones, *ſexcenta triginta quatuor millia*, *quadringenti viginti ſex* biliones, *tercenta quinquaginta millia &c.*

Schol. II. *Præter valorem ſimplicem*, *quem ſingulæ notæ Arithmeticæ habent proprium, alium inſuper habent ratione loci*, *quem occupant*: *qui valor procedit in proportione ſubdecupla*. *Itaque nota primo loco*, *a dextris incipiendo*, *poſita ſignificat unitates*, *ſecundo loco poſita ſignificat tot decades*, *quot unitates habet*; *tertio loco tot centenas*, *quarto loco millia*, *quinto loco dena millia*, *ſexto loco centena millia &c. Id tyrones bene intelligant neceſſe eſt*. *Ecce exemplum*.

1	3	4	6	5	9	2.	duo.
					9	0.	nonaginta.
				5	0	0.	quingenta.
			6	0	0	0.	ſex millia.
		4	0	0	0	0.	quadraginta millia.
	3	0	0	0	0	0.	trecenta millia.
1	0	0	0	0	0	0.	decies centena millia. ſeu millio.
1	3	4	6	5	9	2.	

PROPOSITIO II.

De Additione Integrorum.

I. ADditio eſt plurimorum numerorum in unam ſummam collectio. Numeri addendi vocantur *dati*; numerus, qui ex additione conflatur, dicitur *ſumma*, ſeu *aggregatum*. Additio

procedit a dextra in sinistram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem sibi respondeant.

2. Ducta linea, numeros sub eadem columna positos in unum collige; & si novem non excedant, subscribe quotquot sunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, subscribe id, quod remanet supra decades, & adde sequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

Sit exemplum, quæritur quot anni elapsi sint ab orbe condito usque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo *tom.* 2. *lib.* 13. *de Doctrina Temporum* numerantur,

	D	*C*	*B*	*A*
Ab Adamo ad finem Diluvii anni	1	6	5	6
A fine Diluvii ad Christum	2	3	2	7
A Christo ad annum 1742	1	7	4	2
Summa	5	7	2	5

Nam primo unitates 2, 7, 6 in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanet 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reservo 1 pro sequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5. in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, sunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ *C* cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro sequenti columna *D*.

De-

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ scribo infra lineam, & habetur summa quæsita 5725.

Sit aliud exemplum. Addendæ sunt in unam summam plures accepti; vel expensi summæ *A*, *B*, *C*.

A 104	*B* 7245	*C* 235
741	3280	7348
892	834	9532
1380	1273	780
E Sum. 3117	Sum. 12632	Sum. 17895

Peracta operatione, habetur summa *E* 3117; ubi patet, cyphas 0 in additione nihil addere, nam 0, 2, 1, 4, faciunt 7.

II. Præter usitatum additionis explicatæ modum, est alter, in quo operatio procedit a sinistra versus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur sed tota summa statim infra lineam describitur. Addendi sint numeri *A*, *B*, *C*.

	FGHI
A	1966
B	7345
C	9289
D	17480
E	112
X	18600

1. Incipiens a sinistra, quæ hic millia significat, dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 fa-

faciunt 17; quem totum scribo sub ipsa columna millium *F*.

2. Colligo centena secundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate sub linea, sed 1 sub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notatur decades 18 sub columna *H*, & unitates 20. sub columna *I*.

3. Ducta linea, altera fit additio ordinum *D* & *E*, & habetur summa quæsita *X*.

Demonstr. Additionis ratio manifesta est ex *Axiom. 9. lib.* 1. *Eucl.* nempe totum æquale esse omnibus suis partibus simul sumptis. Tot enim sunt unitates, decades, centena, ac millia in summa reperta X, quot unitates, decades, centena, ac millia existunt in summis singulis datis *A*, *B*, *C*. Nam si colligantur unitates sub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc est decades 2, proinde ponitur 0, & reservantur 2 illæ decades ad propriam sedem decadum *H*. Similiter decades collectæ sub columna *H* sunt 18, quæ additis duabus prioribus, faciunt 20, hoc est centena 2, adeoque ponitur 0, & reservantur 2 ad sequentem seriem. Sub columna tertia *G* sunt 14 centena, quibus si addantur 2 præcedentia, sunt 16. Ponitur itaque 6, & reservatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ *F* sunt 17, quæ cum præcedenti 1 sunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in summa X contineri, quot omnino continentur in numeris datis *A*, *B*, *C*. Quod totum patet ad oculum, scilicet

FO

	F	G	H	I
A	1	9	6	6
B	7	3	4	5
C	9	2	8	9

Unitates	20	20
Decades	18 .	180
Centena	14 . .	1400
Millena	17 . . .	17000
	X 18600	X 18600

PROPOSITIO III.

Additionem examinare.

Multiplici ratione fieri poteſt examen.

1. Eandem additionem repete, ſed ordine mutato, ut ſi prius ab imo ſurſum proceſſeris, deinde a ſummo deorſum deſcendas: nam ſi utraque ſumma inventa eadem fuerit, probabile eſt nullum errorem irrepſiſſe.

2. A numeris addendis abjicitur 9 quoties poteſt, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & reſiduum notatur in angulo crucis. Abjectiſque deinde 9 ex ſumma *A*, ponitur reſiduum in altero angulo; quæ reſidua ſi fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet ſequenti exemplo.

4824	6	
5721		
3402		
A 13947		6

Hoc

Hoc examen male audit, ut fallax, nam si pro summa *A* alia longe major ponatur 19347, iisdem numeris ordine mutato constans, aut si eidem summæ *A* addas quotcumque volueris cyphras 0, semper remanet, abjectis novenariis, idem residuum 6. Ceterum ob summam ejus facilitatem non est rejiciendum.

3. Fit abjiciendo omnes numeros septenarios e qualibet summa particulari *A*, *B*, *C*, & ponendo seorsim residuum ut in *E*. Abjectisque deinde 7 ex utraque summa *M*, & *N*, si residua in utroque angulo crucis posita æqualia sint, res bene processit. Est autem discrimen inter hoc, & superius examen. Numerus 9 abjicitur per additionem numeri ad numerum, ex. gr. ut abjiciam 9 ex 134, sufficit addere simul 4 cum 3 & 1, & habetur statim novenarii residuum 8. At si abjicere velis 7 ex eodem 134, procedendum est per decades; abjiciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & residuum est 1.

A 3 4 5 6	*E* 5		
B 7 2 0 1	5	3	
C 3 4 5 8	0		
M 1 4 1 1 5	*N* 10		3

Hoc quoque examen aliquando fallit, sed raro. Ratio autem utriusque examinis desumitur ex *Axiom.* 3. *lib.* 1. *Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, residua sunt æqualia.

PRO-

PROPOSITIO IV.

De Subtractione Integrorum.

SUbtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem. En praxis.

1. Collocetur numerus minor sub majori, a quo debet subtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis respondeant, ut de additione dictum est *Prop.* 2.

2. Ducta linea, & dextrorsum incipiendo, auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, scribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, ponatur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate minuitur, vel (idem enim est) subsequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum si numerus inferior sit superiori numero æqualis, ponitur infra lineam o; vel linea —, si id contingat in fine operationis.

Sit exemplum. Debet quis alteri aureorum summam *A*, non habet nisi aureorum summam *B* solvendam, quærit quantum de ære alieno superfit.

A	1925
B	1382
C	— 543

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ scribe infra lineam. Deinde 8 subduci non potest ex 2, intel-

intellige decadem additam ipsi 2, fiet 12, ex quo aufer 8, remanent 4, scribenda infra lineam. At subsequens numerus superior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde subductis 4 ex 9, residuum est 5, quod scribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1, nihil remanet, scribe lineam. Debebit igitur adhuc aureos 543, cum talis sit excessus numeri majoris *A* supra minorem *B*.

Similiter subduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur excessus, seu residuum X.

M 620010027
N 31957684
———————
X 588052343

Aufer 4 ex 7, residuum est 3. Item 8 ex 12, residuum est 4. Pariter 7 ex 10, residuum est 3. Similiter 8 ex 10, residuum est 2, tum 6 ex 11, residuum est 5, & 10 ex 10, residuum est 0 &c.

Examen subtractionis generatim fit addendo residuum *X* numero minori subtracto *N* Nam si erratum non sit, restituitur major numerus *M*, ut patet.

Examen fieri quoque potest per abjectionem novenarii. Nam abjecto novenario ex *A*, quantum abjici potest, residuum est 8. Deinde abjecto novenario ex numeris *B* & *C*, æqualibus ipsi *A*, residuum pariter est 8.

A 6434	8	
B 531		
C 5913		8

De-

Demonstr. Subtractionis per se patet. Nam ex *Defin.* subtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem, proinde excessus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent esse in *B*, & *C* simul, quot sunt in *A*. Sed subducendo 1 ex 4, ponitur residuum 3. Sunt ergo tot unitates in *B*, & *C* simul, quot sunt in *A*, nempe 4. Similiter subducendo decades 2 ex decadibus 5, ponitur 1 in residuo. Igitur decades *B* & *C* æquales sunt decadibus in *A* contentis, nempe 3, & sic deinceps. Est ergo æqualitas inter *A*, & *B* una cum *C*. Quod &c.

PROPOSITIO V.

De Multiplicatione Integrorum.

M*Ultiplicatio* est ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum est inventio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus *A* 12 multiplicatus per *B* 3 producit numerum *C* 36, qui ter continet *A*, sicuti *B* ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem esse compendiosam additionem; idem enim est multiplicare *A* per *B*, ac toties addere ipsum *A*, quot sunt in *B* unitates.

Numeri *A* & *B* dicuntur *multiplicatores*, seu *factores*, numerum *C productum*, seu *factum*. Vulgo tamen qui minor est, & inferius scribitur, dicitur multiplicator, seu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si

1. Si multiplicator unica figura conſtet, (ut in primo ſequenti exemplo) illa ducatur ſingillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facto a dextra verſus ſiniſtram; & quot productum continet decades, tot reſerventur unitates ſequenti producto adjiciendæ, & ſcribatur infra lineam id, quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus conſtet figuris, tunc ſingulæ ſeorſum ducantur in ſingulas numeri multiplicandi figuras, ſed producta ita infra lineam ſcribantur, ut productum ſecundæ ponatur directe ſub ipſa ſecunda figura, productum tertiæ figuræ ſub tertia, & ſic deinceps, cum hæc producta importent decades, centena &c.

3. Ducta linea, ſingula producta particularia in unam ſummam colligantur, ut habeatur integrum productum quæſitum.

Sit exemplum 1. Vendendi ſunt agni *A* juliis 5 in ſingula capita, quæritur pretium *C*.

A	1 2 7 6.	*multiplicandus*.
	5.	*multiplicans*.
C	6 3 8 0.	*productum*.

Primo 6 quinquies ſumptus facit 30, pono 0, & ſequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Deinde 7 quinquies ſumptus facit 35: addo 3, fiunt 38, ſcribo infra lineam 8, & reſervo 3. Tum 2 quinquies ſumptus facit 10, addo 3 fiunt 13, ſcribo infra lineam 3, & ſervo 1. Demum 1 quinquies ſumptus facit 5, addo 1 præcedentem, & ſcribo 6.

Exemplum 2. Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere ſupponitur.

Dies

Dies			3	6	5
Horæ				2	4
	1	4	6	0	
			7	3	0
Horæ		8	7	6	0

Exemplum 3. Ærarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quæritur aureorum summa.

Opp.			8	2	4
Aur.			1	0	2
		1	6	4	8
	8	2	4	0	
Aur.	8	4	0	4	8

Coroll. Hinc patet, quod si in multiplicatore occurrit cyphra 0, ponitur in producto cyphra (vel plures, si sint), deinde statim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum.

Schol. I. *Cyphræ initiales ante operationem resecantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot sunt. Pariter si multiplicandus sit numerus per* 10, *vel* 100, *vel* 1000. &c. *satis est addere multiplicando ad dextram tot cyphras, quot continentur in multiplicatore, sine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrumque patet exemplis* A & B.

A 136	0	*B*	15724
2	00		1000
272	,000		15724,000

Schol. II. *Multiplicatio fit etiam per factores nume-*

meri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem est multiplicare 30 *per* 24, *ac* 30 *per* 4 *&* 6 *hoc est* 30 *per* 4, *ejusque productum per* 6.

Schol. III. *Multiplicatio fit etiam per tabulam, quæ ab ejus auctore Pythagora vocatur* Pythagorica. *En usus; si scire velis productum ex. gr. ex* 3 *in* 8, *quæro* 3 *in columna* AB, *&* 8 *in fronte* AC, *invenies in communi concursu productum* 24. *Sic de ceteris. Ratio est, quia columna prima incipit ab unitate, & descendendo crescit usque ad* 9. *Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. semper usque ad* 9 *progredientes. Prima crescit sola unitate, secunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus* 8, *qui crescit numero octonario, habet in tertia sede numerum* 8 *ter sumptum, scilicet* 24. *Idem numerus* 8 *habet in quinta sede* 40, *hoc est* 8 *quinquies sumptum, & sic de ceteris.*

A *Tabula Pythagorica.* C

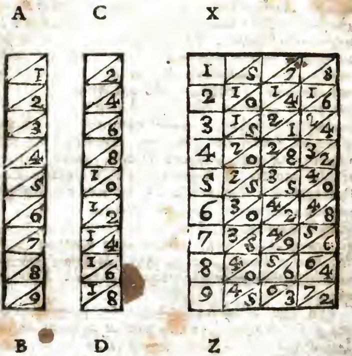
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

B D

Schol.

Schol.IV. *Tabulam Pythagoricam in plures tabellas oblongas mobiles diſſecuit Jo: Neperus Scotus, quibus mirabili artificio multiplicationis, & diviſionis compendium exhibetur. En conſtructio. Fiant ex ære, vel ligno, aliave materia ſolida decem vel undecim tabellæ, ſeu parallelepipeda, ut ſunt* AB, CD; *quorum longitudo dividatur in 9 quadrata æqualia; iiſque per diametrum diviſis (excepto uno* XZ, *cui inſcribuntur ſimpliciter numeri naturales* 1, 2, 3, 4 *&c. uſque ad novem incluſive, qui exponentes vocantur) habentur totidem triangula æqualia, quibus inſcribendi ſunt numeri ex ſingulis columnis ejuſdem Tabulæ Pythagoricæ; ita tamen ut in uno parallelepipedo quadrata ſuperiora habeant numeros* 1, 2, 3, 4. *In ſecundo numeros* 2, 3, 4, 5. *In tertio* 3, 4, 5, 6, *& ſic ſucceſſive. Sic enim poterit idem numerus ſi opus ſit, iterato haberi, ex. gr.* 555. *In uno, vel altero parallelepipedo ponuntur ubique cyphræ. Ecce autem uſus.*

Eſto multiplicandus 578 *per* 69. *Jungantur ſimul tria parallelepipeda, quæ in vertice referant numerum datum* 578 (*ut in figura*) *præfixo ad lævam parallelepipedo* XZ *exponentium, ex quo habentur numeri multiplicatoris* 6 *&* 9. *Jam ſingula facta numeri* 9 *in* 578 *exhibentur in triangulis, & rhombis directe ad ipſum* 9 *appoſitis, facto initio a triangulo inferiore dextrorſum, & addendo numeros in rhombis poſitos, nempe* 5202. *Eodem modo habentur facta numeri* 6 *per* 578, *nempe* 3468, *quæ addita, ut ſuperius num.* 2. *dictum eſt, dant productum integrum* 39882.



Multiplicationis examen fieri poteſt per abjectionem novenarii, aut ſeptenarii. Nam 1°. abjicitur 9, vel 7 ex numero multiplicando *A*, & reſiduum ponitur in angulo crucis *M*. 2°. Rejicitur 9, vel 7 ex multiplicante *B*, cujus reſiduum ponitur in angulo crucis *N*. 3°. Multiplicantur inter ſe *M* & *N*, & ex producto abjicitur 9, vel 7, reſiduumque ſcribitur

bitur in angulo *R*. 4.° Rejectis 9, vel 7 ex producto *C*, habetur residuum, quod si æquale sit residuo priori *R*, res bene processit.

A	3506			
B	132	*M* 5	3	*R*
D	7012	*N* 6	3	*T*
E	10518			
F	3506	6	1	
C	462792	6	1	

Et etiam *examen per divisionem*. Nam si dividatur productum *C* per alterutrum factorem *A*, vel *B*, prodibit in quotiente alter factorum *A*, vel *B*. Sed prius intelligendum, quid sit divisio, de qua in sequenti *Prop.*

Demonstr. Cum multiplicatio sit compendiosa additio, ut dictum est, multiplicatio numeri *A* per notam ultimam numeri *B*, nempe per 2, est addere ipsum numerum *A* bis, unde producitur *D* 7012, in quo tot sunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in *A* bis sumpto. Similiter multiplicatio ejusdem numeri *A* per secundam notam numeri *B*, nempe per 3, qui significat 30, est additio ipsius *A* sumpti trigesies, unde productum *E* tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in *A* trigesies sumpto. Demum productum *F* habetur ex multiplicatione numeri *A* per 1, hoc est per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in *F*, quot continentur in *A*, si centies sumatur. Igitur tres numeri *D*, *E*, *F*, seu productum integrum *C*, tot continet unitates, decades &c. quot

continentur in *A* centum trigesies, & bis sumpto. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

De Divisione Integrorum.

Divisio est inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet divisorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per suas unitates, quoties divisor continetur in dividendo. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, sive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet divisorem 3.

I. Sit divisor numerus simplex 5, per quem dividendus est numerus datus 1580455. Ponatur divisor sinistrorsum seorsim post lineam, ut in *M*.

Divisor M 5) 1 5 8 0 4 5 5. *dividendus*.
3 1 6 0 9 1. *quotus*.

Et procedendo a sinistra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, subscribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continetur in subsequenti numero 8, continetur semel, & remanent 3. Scribe 1 sub ipso 8, tum adde decades tres sequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus divisis per 5, habetur quotus 6, quem pone sub 0. Postea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur 0 in quoto, & adde quatuor decades subsequenti numero 5, fiunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem subscribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæsitus est 316091. Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a colonna*.

Fie-

Fieri etiam poteſt hæc diviſio præſidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in *præc. Prop.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; diviſor vero in latere *AB*, & quotus in fronte *AC*. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & diviſore 5 in latere *AB*, invenitur in fronte *AC* quotus 8. Quod ſi dati numeri 40 diviſor fuerit 8, invenietur in fronte quotus 5; & ſic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præciſe non reperitur, ut ſi dividendus ſit 50 per 6; ſumitur numerus proxime minor, cui directe reſpondet diviſor 6 in latere exiſtens, nempe 48, & in fronte occurrit 8, qui erit quotus quæſitus.

Examen hujuſce diviſionis fit multiplicando quotum per diviſorem. Si erratum non ſit, reſtituitur idem numerus, qui fuit diviſus, ut patet.

II. Quod ſi diviſor ſit numerus compoſitus, pluribus conſtans figuris, alia via procedendum. Dividendus ſit numerus datus *A* per *B*.

```
B 45)   A 1 8 6 7 3 0
          1 8 0
        ---------
C 4149  — 6 7
          4 5
        -----
          2 2 3
          1 8 0
          — 4 3 0
          — 4 0 5
          -------
            — 2 5
```

1. Accipe ex dividendo *A* tot figuras ſiniſtrorſum, quot ſunt in diviſore *B*. Vel accipe tot figuras ex numero dato *A*, quot per diviſorem *B* dividi poſſint;

ſint; ut in hoc exemplo 186, eaſque ſecerne puncto. Erit 186 primum diviſionis membrum.

2. Vide quoties diviſor *B* contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoſcere haud facile eſt; vide quoties primo diviſoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum ſequenti figura 6 faciunt 26, in quo ſecunda diviſoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert ſi pluries contineatur) totus ergo diviſor 45 continetur quater in toto diviſionis membro 186, proinde pone 4 in *C*.

3. Per quotum *C* multiplica totum diviſorem *B* 45, & productum 180 ſubſcribe ipſi 186, a quo illud ſubtrahe per *Prop. IV.* remanent 6

4. Ad hoc reſiduum 6 junge dextrorſum ſubſequentem dividendi figuram 7, erit 67 ſecundum diviſionis membrum; eademque omnino operatio inſtituenda eſt, quam breviter in gratiam tyronum proſequar, ſcilicet

Quære quoties diviſor 45 contineatur in 67, patet contineri ſemel, ſcribe ergo in *C* 1, per quem multiplica totum diviſorem *B*, & productum 45 ſubſcribe ipſi 67, factaque ſubtractione, habetur reſiduum 22.

Ad hoc reſiduum 22 adjunge ſequentem dividendi figuram 3, fiet tertium diviſionis membrum 223. Circa quod rurſus eadem operatio repetenda eſt.

Proinde vide quoties diviſor 45 contineatur in 223: ſeu quoties prima figura 4 contineatur in 22; patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum ſequenti figura 3 faciunt 23. Sed ſecunda diviſoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitate (vel etiam pluribus, ſi opus ſit) & reponitur 4 in *C*; per quem multiplicato diviſore *B*, habetur productum 180, quod ſubſcribe ipſi 223, ab eoque ſubtrahe, remanent 43.

Jun-

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum divisionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda est. Vide igitur quoties 4 continentur in 43, dic contineri tamen novies (nam nullus quotus ponitur in *C* major, quam 9) remanent 7, quæ cum cyphra faciunt 70, in quo pariter altera divisoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando divisorem 45 per 9 habetur productum 405, quod subtrahendum est ab ipso 430, & residuum divisionis est 25. Quotus ergo quæsitus *C* est 4149, & remanent 25.

Coroll. Ex præcedenti exemplo tria sunt colligenda. 1. Si secunda, tertia, aut quarta divisoris nota toties contineri non possit in secunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejusdem divisoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum u-na, vel pluribus unitatibus esse minuendum. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem novenario, etiamsi divisor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum totum tot figuris constare, quot sunt divisionis membra.

Sit aliud exemplum. Dividere oporteat numerum datum *M* per numerum *N*.

N 179) *M* 73394475
716

R 410025) — 179
179

000447
358

— 895
895

000

1. Secerne puncto ex dividendo M tres figuras 733, quot sunt in divisore N, erit primum divisionis membrum 733. Jam prima divisoris nota continetur in prima dividendi nota septies, sed cum secunda, & tertia divisoris nota contineri non possint in secunda, & tertia nota dividendi pluries, quam quater, minuitur 7 tribus unitatibus; & ponitur in R quotus 4.

2. Duc divisorem N in 4, & productum 716 subscribe ipsi 733, a quo subtrahendum est, remanent 17. Adde ex dividendo subsequentem figuram 9, faciunt 179, eritque secundum divisionis membrum, in quo patet, divisorem contineri semel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando divisorem, habetur productum 179, subducendum ex ipso 179, adeoque remanet 0.

3. Divisor contineri non potest in duabus subsequentibus dividendi figuris 44, pone ergo in quoto totidem cyphras, & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo, nempe 7, quæ faciunt 447, in quibus divisor continetur bis. Pone igitur in quoto 2, & cetera prosequere, ut supra. Erit quotus R 41002$\frac{5}{}$ sine ullo residuo.

Schol. I. *Quod remanet post singulas subtractiones, nunquam potest esse æquale, aut majus divisore, alias fuit erratum. Assumptus enim fuit quotus justo minor. Contra vero si productum ex quoto in divisorem majus sit residuo divisionis, ex quo fieri debet subtractio, ita ut subtractio fieri non possit, signum est, quotum assumptum esse justo majorem, ac proinde esse minuendum. Utrumque casum tyrones diligenter advertant.*

Schol. II. *Si absoluta divisione aliquid remanet, ut in primo exemplo contigit, residuum illud ponitur supra lineam, & sub eodem ponitur divisor, atque hinc oriuntur fractiones, de quibus in Capite III.*

Schol.

Schol. III. *Qui ſunt in hac dividendi praxi peritiores, producta ex ſingulis quotis in diviſorem non ſubſcribunt, ſed illa memoria retinentes ſtatim ſubtrahunt ex membro diviſionis, & notant reſiduum. Sit dividendus numerus* A *per* B, *quotus* 2 *ductus in diviſorem* 43, *nempe* 86, *non ſubſcribitur ipſi* 87, *ſed immediate mente ſubtrahitur, notaturque ſub eodem* 87 *reſiduum* 1. *Sic etiam invento diviſore* 3, *ductoque in* 3, *& in* 4 (*diviſoris notas*) *producta* 9, *&* 12 *non ſubſcribuntur ſub* 146, *ſed ſubtrahuntur ſtatim, ac notatur primo* 7, *deinde* 1, *hoc eſt reſiduum* 17, *ſub* 146. *Quod compendium valde juvat.*

B 4 3	*A*	8 7 4 6
		1 4 6
2 0 3		1 7

Schol. IV. *Si diviſor habeat in fine unam, vel plures cyphras, ut* 120, 300, 4000 *&c. abſcinduntur ab illo cyphræ, totidemque figuræ a dividendo dextrorſum; deinde fit, ut moris, eſt diviſio cum reliquis figuris: ſed abſoluta operatione, figuræ ex dividendo abſciſſæ ponuntur ſupra lineam, infra quam ponitur diviſor integre ſumptus cum cyphris. Ut ſi dividendus ſit* 635 *per* 200. *Abſcinde duas cyphras ex* 200, *& duas figuras dextrorſum ex dividendo* 635; *diviſo deinde* 6, *per* 2, *habetur quotus* $3\frac{35}{200}$. *Quod ſi prima diviſoris nota fuerit* 1, *& reliquæ omnes cyphræ, ut* 10, 100, 1000 *&c. confecta erit diviſio, ſi ad dexteram dividendi abſcindas totidem figuras; quot ſunt in diviſore cyphræ, nam unitas non dividit. Proinde dividendo* 145690 *per* 10000, *quotus erit* $14\frac{5690}{10000}$; *dividendo per* 1000, *quotus erit* $145\frac{690}{1000}$ *&c.*

Schol.

Schol. V. *est alius non inelegans dividendi modus, quem Itali vulgo vocant*, partire per ripiego; *qui tunc solum adhiberi potest, cum divisor potest resolvi in suos factores: Sit dividendus numerus 15490 per 45, quia divisor 45 resolvi potest in suos factores 5 & 9, ex quibus componitur, divide primo per 5, quotus est 3092: divide deinde quotum 3092 per 9, oritur quotus quæsitus 343* $\frac{5}{9}$. *Similiter dividendus sit 13463 per 36, qui 36 componitur ex 4 & 9, divide per 4 numerum datum, quotus erit 3365* $\frac{3}{4}$, *hunc divide per 9, quotus erit 373* $\frac{8}{9}$. *Ut ex duabus illis fractionibus fiat unica fractio, duc residuum* 8 *in divisorem 4, & producto adde residuum primum 3, fit 35. Duc deinde 4 in 9 fit 36, erit fractio* $\frac{35}{36}$ *unde 373* $\frac{35}{36}$ *quotus quæsitus. Ratio hujus suo loco innotescet.*

Examen divisionis fit per multiplicationem. Nam multiplicando divisorem per quotum, restituitur numerus dividendus, modo illi addatur, si quid ex divisione remansit.

Vel fit examen per abjectionem 9, vel 7. Nam rejectis primo 9, vel 7 tum ex divisore, tum ex quoto residua 8 & 4 notantur in angulo crucis sinistro *A* & *B*, & ducuntur inter se, deinde producti residuum 5, abjectis 9, vel 7, ponitur in vertice ipsius crucis, cui quidem additur residuum divisionis factæ, ablatisque ex hac summa 9, vel 7, quod remanet, ut hic 0, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet esse id, quod restat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7, notatur in *E*. Patet sequenti exemplo.

			5	
3 5	4 5 6 3	*A* 8	0 C 0	6
——	1 0 6	——	—— ——	——
1 3 0	—— 1 3	*B* 4	0 *E* 4	6

Demonſtr. Ex praxi a nobis tradita tot notis conſtare debet quotus, quot ſunt membra diviſionis, ut in *Coroll. num.* 3. dictum eſt. Sed ſingulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties ſingula diviſionis membra diviſorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum diviſionis 186 continet quater diviſorem 45, ſicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita ducitur 45 in 4, & productum 180 (diviſoris 45 quadruplum) ſubtrahitur ex membro diviſionis 186, ergo patet, diviſionis membrum 186 quater continere diviſorem, ſicuti quotus 4 totidem unitates continet, alias ſubtrahi non poſſet. Remanet quidem, facta ſubtractione, numerus ſenarius, ſed hic ſequenti figuræ 7 jungitur pro ſecundo diviſionis membro, ut dictum eſt. Pari ratione idem oſtenditur de ſingulis ipſius quoti notis; unde ſequitur, integrum quotum 4149 toties unitatem continere, quoties dividendus 186730 continet diviſorem 45, adeo ut quotus 4149 æque multiplex ſit unitatis, ac dividendus æque multiplex eſt diviſoris, & ſuperſint 25.

PRO-

Propositio VII.

De divisione integrorum per numeros divisoris multiplices.

Methodus dividendi numerum per numeros divisoris multiplices adhiberi potissimum solet; cum numerus dividendus est valde prolixus.

Sit exemplum. Ex doctrina Tychonis sol motu diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum Italicorum 21400 11712, quæritur quot milliaria conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24 in minuta, multiplicando illas per 60, erit divisor, per quem dividi debet numerus milliariorum *A*, 1440, seu 144 (ablata ab ipso cyphra, & ex dividendo *A* ultima nota dextrorsum 2) qui ponatur ad dexteram dividendi, ut in *B*, & notetur punctum sub tertia ipsius dividendi nota 4, cum divisor *B* semel contineatur in 214, ut in *præc.Prop.* dictum est. Tum scribantur sub ipso divisore *B* singuli multiplices 288,432, 576 &c. cum notis appositis 1, 2, 3, 4 &c. ut in exemplo.

Quia divisor *B* continetur semel in 214, scribatur 1 in quoto *C*, subtractoque divisore ipso ex 214, remanent 70, additaque sequenti figura dividendi, fiunt 700. Tunc observetur qualis ex multiplicibus sub *B* existentibus sit proxime minor, quam 700, patet illum esse 576. Pone igitur in quoto notam illi appositam 4, & subtrahe ipsum 576 ex residuo 700, remanent 124, quibus addita figura sequenti, habetur 1240. Iterum observa, qualis multiplex sit proxime minor ipso

1240;

1240; reperitur 1152, cui apposita est nota 8, hanc pone in quoto *C*, & illum subtrahe ex residuo 1240, residuum est 88, & sic deinceps, donec exhauriantur omnes dividendi figuræ. Sic enim nullo fere labore invenitur quotus 1486119, cum residuo quod $\frac{352}{1400}$ quod quartam fere milliarii partem importat, ut in *Cap. sequen.* explicabitur. Sol igitur unico horæ minuto conficit milliaria Italica 1486119.

C	*A*	*B*	
1 4 8 .....)	214001712	1 4 4	1
	144	1 4 4	2
	———	4 3 2	3
	— 700	5 7 6	4
	576	7 2 0	5
	———	8 6 4	6
	1240	1 0 0 8	7
	1152	1 1 5 2	8
	———	1 2 9 6	9
	— 88.....		

Schol. I. *Est etiam facillima divisio per tabellas Neperianas, de quibus dictum est in Schol. 4. Prop. V. quæ ex hac Propos. sequitur. Nam esto dividendus numerus* A 142188 *per* B 578. *Apponentur tres tabellæ, quæ in vertice referant divisorem* 578, *præfixa illis tabella numerorum exponentium* 1, 2, 3, 4, *&c.* (*vid. tabellam* XZ *pag.* 18.) *Tum determinentur puncto in numero dividendo tot notæ, quot divisibiles sunt per* 578, *nempe* 1421. *Patet exponentes* 1, 2, 3, 4, *indicare summas multiplices, hoc est duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius divisoris* 578; *quod ex ipsa constructione tabellarum, & ex Schol. præcit. facile intelligitur. Collectis enim in* unam

unam summam numeris ex triangulis, & rhombis directe ad exponentem ex. gr. 2 appositis, habetur duplum ipsius 578, *nempe* 1156, *& sic de aliis. Observa igitur qualis numerus sit æqualis, vel proxime minor dividendi membro* 1421, *occurrit statim in secundo ordine summa* 1156, *proinde ejusdem ordinis exponens, nempe* 2, *est quotus quæsitus, qui ponatur in* C. *subtractisque* 1156 *ex dividendo* 1421, *remanent* 265. *Pro secundo divisionis membro adde sequentem notam* 8, *fiunt* 2658, *& eodem modo operare: hoc est observa in tabellis, qualis sit numerus proxime minor* 2658 *invenies in quarto ordine summam* 2312, *quæ indicat quotientem* 4 *ponendum in* C, *subtractisque* 2312 *ex* 2658, *residuum est* 346. *Addita demum ultima figura* 8, *fiunt* 3468, *quæ in tabellis quæsita, dant quotum* 6 *sine ullo residuo. Est ergo quotus* 246. *Quod totum tum ex tabella præcitata* XZ, *tum ex sequenti schemate satis patet.*

```
C 246      A 1 4 2 1 8 8      B 5 7 8
             1 1 5 6
          ____________
               — 2 6 5 8
                 2 3 1 2
          ____________
                 — 3 4 6 8
                   3 4 6 8
          ____________
                   0 0 0 0
```

Schol. II. *Si membrum dividendum minus sit ipso divisore, additur quoto cyphra, & alia figura membro dividendo adjicitur, ut in Prop. VI. dictum est. Ceterum si quis in hac dividendi praxi sit aliquanto exercitatus, divisiones etiam prolixas citissi-*

me

me expediet, *eritque minus obnoxius erroribus*, *qui inter dividendum ex incuria*, *vel hallucinatione nascuntur*.

CAPUT II.

De Calculo Denominatorum.

REgulæ vulgaris Arithmeticæ hactenus traditæ applicari jam debent numeris *denominatis*, hoc est numeris diversarum specierum. Quod quidem difficile non erit, si dignoscatur valor unius speciei respectu alterius; nimirum quot partes minoris speciei majorem speciem constituant. Sic ut addantur, vel subtrahantur dies, horæ, ac minuta, necesse est scire minuta temporis 60 unam horam, horas autem 24 diem unum efficere. Idem de monetis, ponderibus, ac mensuris valet: quæ licet pro diversitate Provinciarum, imo & Urbium variæ sint, modus tamen eas calculandi est ubique proportionaliter idem; adeo ut si quis unius loci monetas, pondera ac mensuras addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere noverit, ad alterius quoque regionis calculum easdem regulas applicare facile poterit.

PROPOSITIO I.

De Additione numerorum denominatorum.

I. E*Xemplum sit* de vulgari moneta Romana, quam componunt scuta, asses, & quadrantes; hoc est quadrantes 5 assem 1, & asses 100 scutum 1, quod decem denariis argenteis, seu juliis constat.

Disponantur species similes sub similibus; ac primo quidem loco dextrorsus species minimæ, tum ordine majores usque ad maximam: ut in hoc exemplo

exemplo collocentur primo quadrantes, secundo asses, tertio scuta; & si qua species intermedia desit, vacuus ejus locus repleatur cyphra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, fiunt 8, quibus continetur assis 1, & remanent 3, quæ scribe infra lineam. Adde deinde assem 1 ad sequentem seriem assium nempe ad 5, 0, 8, 5 fiunt 19 asses. Scribe novem infra lineam, & pro decade una adde 1 ad assium decades 1, 2, 9, 3 funt decades 16, hoc est asses 160; reserva itaque decades 10, (centenarium nempe 1) pro sequenti specie, & scribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena scutorum eo modo quo factum est *in Prop. 2. Cap. 1.* cum sint numeri homogenei, prodibit summa scutorum 5099, asses 69, quadr. 3.

	Scut.	*Ass.*	*Quad.*
	2 3 0.	3 5.	0.
	5 7 2.	9 8.	3.
	7 8 4.	2 0.	4.
	3 5 1 2.	1 5.	1.
Summa	5 0 9 9.	6 9.	3.

II. Libra in Urbe constat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ sunt ergo.

Lib.

	Lib.	Unc.	Den.
	38.	10.	23.
	70.	11.	16.
	352.	05.	22.
Summa	462.	04.	13.

Habentur libræ 462, unc. 4. den. 13. Nam denarii 22, 16, 23 additi faciunt 61, in quibus bis continetur 24, hoc est unciæ 2, quæ sequenti columnæ addendæ sunt, & remanent denarii 13, quos scribe infra lineam. Similiter unciæ 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, sequenti columnæ addendas, & remanent unciæ 4, quæ pariter scribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *Propos.* 2. *Cap.* 1., & habentur libræ 462. unc. 4. den. 13.

III. Addendi sunt pedes Parisienses, pollices, & lineæ. Pes autem Parisiensis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo.

	Pedes	Poll.	Lin.
	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
Summa	1022.	06.	6.

Quod quidem manifestum est: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc est pollicem 1, qui reservatur sequenti columnæ addendus, & scribitur infra lineam residuum 6. Deinde pollices 8, 11; 10 cum 1 præcedenti, fiunt 30, qui bis conti-

C nent

nent 12, hoc eſt pedes 2 ſequenti columnæ addendos, & ſcribitur infra lineam reſiduum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam ſequentem, continuatur additio, ut in *Propoſ.* 2. *Cap.* 1. cum ſint numeri homogenei.

Examen fieri poteſt ſic; completa ſuperioris exempli additione, duc lineam ſub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter ſolum ordinem *A*, qui relinquitur: habebis alterum aggregatum *C*, quod deficit ab aggregato primo *B*, defectu numerorum ordinis *A*. Si ergo aggregato *C* addas numeros *A* habebis aggregatum *D* æquale aggregato primo *B*; alias fuit erratum. Hoc examen uſurpari quoque poteſt pro numeris homogeneis, ut patet,

	Pedes	*Poll.*	*Lin.*
A	128.	10.	9.
	320.	11.	2.
	572.	08.	7.
B	1022.	06.	6.
C	893.	07.	9.
D	1022.	06.	6.

PROPOSITIO II.

De ſubtractione numerorum denominatorum.

DIſponantur ſpecies ſimiles ſub ſimilibus, ut in *præc. Propoſ.* dictum eſt, & numerus minor,

nor, seu subtrahendus, collocetur sub majori, a quo debet subtrahi.

Quoties inferior numerus a superiori subduci nequit, utpote illo major, toties numero superiori addatur unum integrum sequentis speciei, ut fiat major subtrahendo. Deinde numerus speciei, ex qua sumptum fuit illud integrum, unitate minuatur: Quod exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* subtrahenda sit pecunia expensa *B*. Quia quadrantes 4 subtrahi nequeunt ex quadrantibus 3, sumo 1 ex assibus 28, hoc est quadrantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex quibus subductis 4, remanent 4 infra lineam scribendi. Deinde minuendo unitate asses 28, vel augendo unitate (idem enim est) asses 36, ita ut prima figura 6 fiat 7, subducitur 7 a superiori numero 8, & scribitur infra lineam residuum 1. Rursus quia 3 subtrahi nequit ex 2, sumo 1 ex scutis, ut ad 2 addantur 10, ac fiat 12, ex quo subtractis 3, residuum, quod scribitur infra lineam, est 9. Minuitur deinde 8, vel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum continuatur subtractio, ut in *Prop.* 4. *Cap.* 1., & habetur residuum *C* scut. 140, ass. 91, quadr. 4.

	Scut.	*Ass.*	*Quadr.*
A	198.	28.	3.
B	57.	36.	4.
C	140.	91.	4.

II. Subtrahendus sit numerus *N* ex numero *M*, scilicet.

	Dies.	Horæ.	Min.
M	21.	14.	53.
N	10.	13.	57.
Q	11.	00.	56.
	21.	14.	53.

Cum minuta 57 ſubtrahi nequeant ex minutis 53, deſumitur unum integrum ex ſequenti ſpecie, nempe hora 1, ſeu minuta 60, quæ addita minutis 53 faciunt min. 113, ex quibus ſubtractis 57, ſcribitur infra lineam reſiduum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta ſubtractione, nullum eſt reſiduum, & ſcribitur 0. Demum ſubductis 10 ex 21 reſiduum eſt 11, eſt ergo numerus quæſitus *Q* dies 11 min. 56.

Examen fit addendo reſiduum *Q* numero minori *N*, nam facta additione, ut in *Propſ. præc.* dictum eſt, reſtituitur major numerus *M*, ſi erratum non fuerit.

PROPOSITIO III.

De multiplicatione numerorum denominatorum.

PRimo reducantur omnes ſpecies ad minimam, ut ſi multiplicandæ ſint libræ, ſolidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde ſpecies reductæ multiplicentur, ut moris eſt, per *Prop.* 5. *Cap.* 1. Productum vero reducitur ad majorem ſpeciem per diviſionem.

I. *Sit exemplum*. Plancus expendit ſingulis diebus libras 5, ſolidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, ſeu diebus 365. expendet.

Cum

Cum denarii 12 solidum unum, solidi vero 20 libram constituant, duc libras 5 in 20; producto adde 15, habebis solidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1383; qui multiplicandi sunt per dies 365, fitque per *Prop.* 5. *Cap.* 1. productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis solidos 42218, & denarios 4; utque solidi ad libras reducantur, divide illos 20, erunt libræ 2110, & solidi 18. Itaque Plancus uno anno expendet lib. 2110, sol. 18, den. 4. En totius reductionis typus.

	20
Lib.	5
	100
Adde	15
Sol.	115
	12
	230
	115
	1380
Adde	8
Den.	1388

II. *Sit exemplum*. Cum sol motu proprio conficiat singulis diebus minuta 59, & secunda 8, quæritur quantum progrediatur diebus 30. Reducantur minuta 59 ad secunda, multiplicando illa per 60, & addendo 8 ad eorum productum, fient secunda 3548, quæ multiplicari debent per dies

30. Erit per *Prop.* 5. *Cap.* 1. productum 106440. secundorum. Hæc divide per 60, quotus dat minuta 1774, quæ quidem si iterum dividas per 60. habebis gradus 29, & min. 34, quos sol motu proprio percurrit in Ecliptica diebus 30.

Examen multiplicationis fit per divisionem, de qua *in sequenti Propos.*

PROPOSITIO IV.

De divisione numerorum denominatorum.

TAM divisoris, quam dividendi species reducantur ad minimam, ut factum est in *præc. Propos.* Tum fiat divisio *per Prop. 6. Cap.* 1.

I. Emit quis serici ulnas 60, pal. 6, unc. 10, expenditque scuta Romana 292, asses 10; quæritur quanti steterit una. Duc ulnas 60 in 8, ut fiant palmi; adde producto 6, erunt palmi 486. Hos duc in 12, ut fiant unciæ, additisque unciis 10, erunt unciæ 5842. Reducantur pariter scuta ad asses, & addantur asses 10, fient asses 29210. Itaque dividatur per *Prop. 6. Cap.* 1. asses 29210. per 5842, quotus est 5: hoc est uncia quælibet valet assibus 5, proinde unciæ 12, seu palmus, valet assibus 60, adeoque palmi 8, sive ulna, valet assibus 480, hoc est scut. 4, assibus 80.

II. Fingamus lunam distare ab aliqua fixa gr. 45, min. 30, sec. 25, quæritur quanto tempore stellam illam luna assequetur. Ex Tab. Alfonsinis luna motu suo diurno conficit gr. 13 min. 10, sec. 35. Proinde dividendi sunt gradus 45, min. 30, sec. 25. per gradus 13, min. 10, sec. 35, ut habeatur appulsus lunæ ad fixam.

Pri-

Primo duc gr. 45 in 60, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rurſus in 60, & adde producto 25, habebis ſec. 163825, numerus ſcilicet dividendus. Eodem pacto invenietur diviſor, nempe min. ſec. 47435. Tum facta diviſione per *Propoſ.* 6. *Cap.* 1. habetur quotus 3, hoc eſt dies 3, & remanent $\frac{21520}{47435}$ partes ſcilicet unius diei, ex qua fractione eruuntur horæ 10, min. 53 circiter, modo explicando in *Propoſ.* 4. *Cap.* 3. Luna igitur ad ſtellam perveniet diebus 3, horis 10, min. 53.

Examen diviſionis fit per multiplicationem. Nam ſi in exemplo primo multiplicaveris per *Propoſ. præc.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per ſcut. 4. aſſ. 80, hoc eſt uncias 5842 per aſſes 480, fiet productum 2804160, quod diviſum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto ſcut. 292. 10. Similiter in ſecundo exemplo ducto diviſore 47435 in quotum 3, additoque ad productum reſiduo 21520, reſtituitur numerus, qui fuit diviſus 163825.

CAPUT III.

De Calculo Fractorum.

DEFINITIONES.

NUmerus *fractus*, qui, & *fractio*, vel *minutia* dicitur; eſt pars, ſeu partes alicujus numeri integri in plures æquales partes diviſi. Ut ſi totum aliquid dividatur in tres partes æquales, & ex illis quiſpiam duas partes obtineat, dicetur habere duas tertias partes, ſcilicet $\frac{2}{3}$ quæ fractionem efficiunt.

 Ita-

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui ſcribitur ſupra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quæ de illo toto diviſo habentur: alter qui ſcribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, ſeu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit diviſum, nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet.

$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{2}{7}\quad \frac{4}{9}\quad \frac{11}{20}\quad \&c.$$

Quæ fractiones ſic pronunciantur, *una dimidia*, *una tertia*, *duæ ſeptimæ*, *quatuor nonæ*, *undecim vigeſimæ &c.* intelligitur pars, ſeu partes.

Si numerator æqualis ſit denominatori, minutia æqualis eſt uni integro. Sic $\frac{3}{3}$ æquivalent uni integro in tres partes æquales diviſo. Adſunt enim omnes partes illius integri, adeoque $\frac{3}{3}$ ſunt 1. Item $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{8}$ &c. ſignificant 1. Hinc patet, unitatem eſſe illud totum diviſum in partes tertias, quintas, ſextas &c.

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic $\frac{4}{3}$ plus ſunt quam unum integrum in tres partes diviſum, ſed important 1, & inſuper $\frac{1}{3}$. Similiter $\frac{16}{5}$ ſignificant tria integra, & adhuc $\frac{1}{5}$.

II. *Minutia minutiæ* eſt pars alterius minutiæ, ut ſi fractionis $\frac{3}{4}$ ſumatur dimidia pars, nempe $\frac{3}{8}$, erit hæc minutia minutiæ, quæ a majori diſtingui ſolet per interpoſitam lineam; ſic $\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4}$ ſignificat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in poſterum ſignis, quæ ſequuntur.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ ſignificat duas quantitates a & b eſſe æquales.

$+$ *Plus*. *Signum additionis*. Ut $a + b$ ſignificat

cat summam duarum quantitatum a, & b. Sic $3 + 5$ significat summam 8, & exprimitur $3 + 5 = 8$.

— *Minus*. *Signum subtractionis*. Ut $a - b$ significat a minus b, hoc est a quantitate a subtractam esse quantitatem b. Sic $5 - 3 = 2$.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ significat a multiplicatum in b, vel per b. Ut $3 \times 5 = 15$.

$= ::$ *Signum proportionum æqualium*. Sic a, b $::$ c. d denotat eandem esse proportionem inter a & b, quæ est inter c & d. Ut 2. 4 :: 3. 6. Item 1, 3 :: 9. 27 &c.

$\div$ *Signum proportionis continuæ*. Sic $\div a, b\ c$, denotat a esse ad b, sicuti ad c. Ut 2, 4, 8.

AXIOMATA.

I. Unitas sic habet ad fractionem, ut denominator ad numeratorem. Sic 1. $\frac{3}{2}$ :: 3. 2. Unitas enim ex dictis est totum divisum, quod se habet ad partem, (quæ est fractio) ut fractionis denominator (qui est totum, quod fuit divisum) ad sui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad suos numeratores eandem rationem, sunt inter se æquales, & valent omnino idem. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$ &c. sunt fractiones æquales, idemque significant. Quod ex primo *Axiom.*, tum etiam per se patet. Nam singulæ hæ fractiones unius integri medietatem important. Hinc fractorum valor non ex magnitudine numerorum, quibus exprimitur, sed æstimari debet ex proportione majori, vel minori, quam numerator habet ad suum

ſuum denominatorem; proinde major eſt $\frac{1}{2}$, quam $\frac{1}{10}$, vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam denominator per eundem numerum multiplicantur, aut dividuntur, valorem non mutant. Sic multiplicando $\frac{2}{3}$ per 5 oritur $\frac{10}{15}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.* Pariter dividendo $\frac{10}{15}$ per 5, fit $\frac{2}{3}$ ejuſdem valoris cum $\frac{10}{15}$ Item diviſis $\frac{3}{9}$ per 3, fit $\frac{1}{3}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

Schol. *Multum intereſt, ut tyrones hactenus dicta bene intelligant, prius quam ad fractorum regulas addiſcendas procedant, alioquin diffi cilia illis, & valde obſcura erunt, quæ ſequuntur.*

PROPOSITIO I.

Datis duobus numeris, maximam eorum communem menſuram invenire.

MEnſura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & ſine reſiduo dividit; ſeu numerus, qui aliquoties ſumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur menſura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum ſepties ſumptus adæquat. Dicitur autem menſura maxima numerus, per quem ſolum duo numeri reducuntur ad numeros primos, ſeu minimos.

I. Dati ſint duo numeri *A* & *B* quorum menſura communis maxima quæritur. Dividatur major *A* per minorem *B*, & neglecto quoto notetur reſiduum *C* : deinde *B* dividatur per reſidu-

um

um *C*, tum residuum *C* per residuum *D*, & sic deinceps nulla habita exponentium ratione, donec tandem divisor occurrat *F*, qui præcedentem exacte dividat sine ullo residuo, hic erit maxima communis mensura quæsita.

Exempl. 1	*A*	2 3 4	*Exempl.* 2.	4 3 8
	B	1 4 4		1 0 2
	C	9 0		3 0
	D	5 4		1 2
	E	3 6		6
	F	1 8		0
		0		

II. Quod si post omnem divisionem remanet 1, signum est, nullam reperiri posse communem mensuram inter numeros datos, eosque esse inter se primos.

Dati sint numeri *M* & *N*, divide majorem *M* per *N*, & neglecto quoto, nota residuum R, ac sic deinceps prosequere, occurrit demum 1, adeoque numeri dati *M* & *N* sunt inter se primi.

Exempl. 1.	*M*	1 3 4	*Exempl.* 2.	2 7 9
	N	4 9		1 4 7
	R	3 6		1 2 2
	S	1 3		2 5
		1 0		3
		3		1
		1		

Demonstr. per se manifesta est. Nam per continuam illam numeri minoris a majori subtractionem (divisio enim est compendiosa subtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel ali-

quan-

quantam numerorum datorum. In primo casu pars illa aliquota erit maxima communis mensura duorum numerorum; in secundo casu evidens est, nullum alium numerum, præter unitatem, metiri posse numeros datos, adeoque sunt inter se primi (*per Defin.* 8.

Schol. *Nota, quemlibet numerum se ipsum semel metiri; proinde dari potest mensura communis maxima inter duos numeros, quorum alter simplex sit, seu primus, & alter compositus. Sic* 7 *est maxima communis mensura inter* 7, & 21. *Nam utroque diviso per* 7, *habetur* 1, & 3. *Item* 5, & 75 *divisi per* 5, *faciunt* 1, & 15, *adeoque* 5 *est maxima communis mensura; & sic de aliis.*

PROPOSITIO II.

Fractiones ad minimos terminos reducere.

Fractio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia illi æqualis, nempe valoris ejusdem minimis tamen terminis expressa reperitur.

I. Data sit fractio $\frac{160}{296}$ ad minimos terminos reducenda, quæratur maxima communis mensura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propos. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejusdem valoris, & minimis terminis expressa $\frac{20}{37}$ per *Axiom.* 3.

II. Sit minutia data $\frac{60}{96}$ reducenda ad minimos terminos. Inveniatur maxima communis mensura inter 96, & 60, per *Proposit. præc.* erit 12, per quem diviso utroque datæ fractionis termino, ha-

habetur nova fractio $\frac{5}{8}$ minimis terminis expressa. Hæc praxis vulgo dicitur *schifare i rotti*. *Demonstratio* patet ex 3. *Axiom.*

PROPOSITIO III.

Fractiones ad idem nomen reducere.

FRactiones reducere ad idem nomen, est efficere ut fractiones diversorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, seu idem valeant, quod prius.

I. Sint duæ fractiones *A* & *B* ad commune nomen reducendæ. Duc inter se ad invicem denominatores 5×4, & $4. \times 5$, erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, seu decussatim, numeratorem unius minutiæ per denominatorem alterius, hoc est 2×4, & 3×5, erunt novi numeratores 8 & 15, qui directe collocandi sunt sub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in sequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ novæ fractiones *C* & *D* ejusdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejusdem per 3. *Axiom.*

Nam termini fractionis *A* multiplicantur per eundem numerum, hoc est per 4 denominatorem fractionis *B*, unde oritur fractio *C* priori æqualis per *Axiom. cit.* Similiter termini fractionis *B* multiplicantur per 5 denominatorem fractionis *A*, & oritur fractio *D* priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones *C* & *D* idem valent ac duæ priores.

$$A\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\ B \qquad \Big| \qquad \frac{1}{6}\ \ \frac{10}{15}$$

$$C\ \frac{8}{20}\ \ \frac{15}{20}\ D \qquad \Big| \qquad \frac{15}{20}\ \ \frac{60}{90}$$

II. Quod ſi reducendæ ſunt ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut *A*, *B*, *C* &c. duc omnes denominatores inter ſe $3 \times 4 \times 5$, fiet *F* communis denominator *60*, qui diviſibilis eſt per ſingulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem *60* per 3 denominatorem fractionis *A*, quotus eſt 20, tertia ſcilicet denominatoris communis pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipſius *60*, adeoque $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ per *Axiom.* 2.

Similiter diviſo *60* communi denominatore per denominatorem 4 fractionis *B*, habetur 15 quarta pars ipſius *60*. Duc 15 in 3 habebis 45, tres quartas partes ejuſdem *60*, adeoque $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ per *Ax.* 2. Eadem ratione invenitur $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Proinde fractiones datæ *A*, *B*, *C*, æquales ſunt fractionibus *M*, *N*, *R*; quod per ſe manifeſtum eſt.

$$A \quad B \quad C$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 60\ F$$

$$M \quad N \quad R$$

$$\frac{40}{60} \quad \frac{45}{60} \quad \frac{12}{60}$$

Co-

Coroll. Ex hac Propoſ. innoteſcit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum ſit major. Nam ſi reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ ſit major. Sic in ſuperiori exemplo fractio *B* eſt ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis *N*.

Schol. *Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc duæ illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit diviſor. Sint reducendæ ad idem nomen fractiones* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{1}{15}$ *quia* 3 *dividit exacte* 15, *multiplica per quotum* 5 *terminos fractionis* $\frac{2}{3}$ *oritur* $\frac{10}{15}$ *ejuſdem nominis cum alia fractione. Quod eſt valde commodum in calculis Algebraicis, ut in noſtris* Inſtit. Analys. *annotavimus*.

PROPOSITIO IV.

Fractionem ad aliam dati nominis, & ejuſdem valoris revocare.

I. DAta ſit fractio $\frac{2}{3}$ quæ revocari debeat in aliam cujus denominator datus ſit 60. Duc numeratorem 2 $\times$ 60, & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutiæ quæſitæ $\frac{40}{60}$, quæ quidem eſt ejuſdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3. 2 :: 60. 40. ut patet.

Da-

Data ſit fractio $\frac{2}{4}\,\frac{1}{}\,\frac{}{4}\,\frac{2}{5}\;0$, quæ ſignificet unius diei partes, ut in *Propoſ.* 4. *Cap.* 2. reducenda ad horas. Duc 21520 $\times$ 24, & productum divide per denominatorem 47435, quotus dat horas 10, & remanent $\frac{4}{4}\,\frac{1}{7}\,\frac{7}{4}\,\frac{}{3}\,\frac{0}{5}$ partes unius horæ. Quæ ut ad minuta reducantur, duc 42130 $\times$ 60, & productum divide per eundem denominatorem, quotus dabit minuta prima 53, & remanent $\frac{}{4}\,\frac{}{7}\,\frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\,\frac{5}{5}$ partes unius minuti primi. Ut invenias ſecunda duc 13745 $\times$ 60, & dividendo per 47435, quotus dabit min. ſecunda 17. Luna igitur ad ſtellam pervenit diebus 3. hor. 10. min. 53. ſec. 17.

II. Quod ſi datæ fractionis denominator non exacte dividit productum, ut ſi $\frac{2}{3}$ reduci debeant ad fractum, cujus denominator eſt 8, productum 16, quod oritur ex 2 $\times$ 8, non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 ſupra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex reſiduo, nempe $\frac{1}{3}$, quæ erit fractionis fractio; & facit hunc ſenſum, duæ tertiæ in octavas redactæ dant quinque octavas & unam tertiam unius octavæ, ſcilicet $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \mid \frac{1}{8}$. Quod autem $\frac{2}{3}$ idem valeant ac $\frac{5}{8} + \frac{1}{3} \mid \frac{1}{8}$ patet. Nam $\frac{1}{3} \mid \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ per *Propſ.* 7. *hujus*, proinde $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{24} =$ (*per Ax.* 3.) $\frac{15}{24} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ per *Prop.* 2. *hujus*.

Schol. *Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut ſi ſcire velis quid valeant* $\frac{3}{5}$ *unius ſcuti Romani in juliis, vel aſſibus. Quia* 10 *julii, aut aſſes* 100 *efficiunt ſcutum Romanum* 1, *duc numeratorem* 3 *in* 10, *aut in* 100, *& productum divide per denominatorem* 5, *erunt in primo caſu* $\frac{6}{1}\,0$, *in ſecundo* $\frac{6}{1}\,\frac{0}{0}\,0$, *hoc eſt julii ſex, aut aſſes* 60. *Item dantur* $\frac{3}{7}$ *unius pedis, ſcire volo quot pollices hæc fractio importet. Quia* 12

pe-

pedem 1 *efficiunt*, *duco* 3 × 12, *& productum* 36 *divido per* 7, *quotus dat* 5, *unde habentur* $\frac{5}{12}$ *hoc est pollices* 5, *& remanet* $\frac{1}{7}$. *Quod si iterum supponas pollicem dividi in* 12 *lineas*, *facile erit explorare*, *quid importet una septima pars unius pollicis*. *Hæc praxis vulgo dicitur* valutar i Rotti.

PROPOSITIO V.

Fractiones ad integra revocare.

I. CUM numerator denominatore suo major est, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic $\frac{12}{3}$ divisæ per 3 dant integra 4. Item $\frac{60}{12}$ divisæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod si denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex residuo minutia. Proinde $\frac{17}{3}$ divisæ per 3 dant integra 5 $\frac{2}{3}$. Similiter $\frac{22}{7}$ divisæ per 7 dant 3 $\frac{1}{7}$.

Schol. *Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias speciei altioris*: *Sic asses* 350 *si dividantur per* 100, *reducuntur ad scuta* $\frac{350}{100}$, *seu* 3 $\frac{1}{2}$. *Pariter minuta* 120 *divisa per* 60, *dant horas* 2. *Patet divisores istos* 100, *&* 60 *esse denominatores minutiarum*, *per quos eorum numeratores dividuntur per hanc propositionem*.

D PRO-

PROPOSITIO VI. & VII.

Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.

SIT datus integer v. g. 3 reducendus in fractum, cujus denominator sit 7. Multiplica integrum ipsum 3 per denominatorem datum 7, & producto subscribe ipsum denominatorem 7, erit fractio quæsita $\frac{21}{7}$. Similiter unitas reducenda sit in fractum, cujus denominator sit 5, erit $\frac{5}{5}$ = 1 ex dictis ad *Definit.* 1. *Cap. hujus.*

Schol. I. *Si integro cuilibet supponatur unitas, fit fractio; vel quasi fractio integro æquivalens, ut* $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{8}{1} = 8$ *&c. quod pro multiplicatione, & divisione fractorum annotetur.*

Schol. II. *Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias inferioris speciei. Sint scuta Romana* 55 *reducenda ad asses, multiplica* 55 $\times$ 100, *habebis asses* 5500. *Item milliaria Romana* 50 *convertenda sint in passus, quia passus* 1000 *milliare* 1 *efficiunt, duc* 50 $\times$ 1000, *fient passus* 5000. *Patet in his exemplis numeros illos* 100, *&* 1000 *esse denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri* 55, *&* 50, *ut fiant fractiones* $\frac{5500}{100}$, $\frac{50000}{1000}$ *juxta hanc* Propos.

PROPOSITIO VII.

Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.

DUæ, vel plures fractiones fractionum ad unam simplicem fractionem reducuntur hoc pacto.

cto. Multiplica singulos numeratores inter se, & singulos pariter denominatores inter se, duo producta minutiam efficient æqualem omnibus illis minutiis minutiarum datis. Sit minutia minutiæ $\frac{1}{4}$) $\frac{2}{3}$) hoc est una quarta pars duarum tertiarum ad simplicem minutiam reducenda; duc inter se numeratores 1 $\times$ 2, & denominatores 4 $\times$ 3, erit nova quæsita minutia $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Similiter reducendæ sint ad simplicem minutiæ minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$), multiplicatis inter se 3 $\times$ 2 $\times$ 3, item 4 $\times$ 3 $\times$ 5, habetur nova minutia omnibus illis æqualis $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ per *Prop.* 1. *hujus*.

Demonst. sensibili aliquo exemplo res manifesta erit. Ponamus hanc ipsam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ desumptam fuisse ex uno scuto Romano, quod decem juliis constat: dico hanc minutiam minutiarum continere $\frac{3}{10}$ unius scuti, nempe tres julios. Nam $\frac{3}{5}$ unius scuti continent sex julios, cum julii duo sint $\frac{1}{5}$ unius scuti. At $\frac{2}{3}$ sex Juliorum sunt quatuor julii, ut patet, & $\frac{3}{4}$ quatuor juliorum sunt tres julii. Ergo evidens est, minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$) $\frac{2}{3}$) $\frac{3}{5}$ continere $\frac{3}{10}$, nempe tres julios.

Id facile illustrari potest dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam si quæratur dimidium unius tertiæ partis ejusdem lineæ, patet illam esse partem sextam totius. Divisis enim bifariam singulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea divisa in sex partes æquales; proinde $\frac{1}{2}$ unius tertiæ facit $\frac{1}{6}$. Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos audit *infilzare i Rotti*.

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fractiones addere.

I. SI fractiones addendæ ſint ejuſdem nominis, adde ſimul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem ſubſcribe. Sint addendæ $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ additis numeratoribus $1 + 2 + 5 + 6 = 14$, fit fractionum ſumma $\frac{14}{7} = 2$ per *Prop.* 5. hujus.

II. Si fractiones addendæ ſint diverſi nominis, reduc ad idem nomen per *Prop.* 3. & operare, ut dictum eſt.

III. Quod ſi addendi ſint integri cum fractis, adde ſeorſim integros, & ſeorſim fractos; ut ſi ad $4\frac{2}{5}$ addendi ſint $3\frac{1}{5}$ fiet ſumma $7\frac{3}{5}$. Res per ſe patet.

PROPOSITIO IX.

Fractiones ſubtrahere.

I. SI minutiæ ſunt ejusdem nominis, minor earum ex majori ſubducitur, & reſiduo ſubſcribitur communis denominator. Sic $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. Item $\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$.

II. Si diverſi ſint nominis, reducantur ad idem nomen per prop. 3., & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris ſubtrahenda ſit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejuſdem nominis cum data fractione per *Propoſ.* 6., & cetera fiant, ut ſupra. Subtrahere oporteat $\frac{2}{3}$ ex 4, reduc 4 ad tertias, erunt $\frac{12}{3}$. Deinde $\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ per *Prop.* 5. Similiter ſubtrahenda ſint $2\frac{1}{3}$,

ex

ex 5 $\frac{1}{2}$, hoc est $\frac{6}{4}$ ex $\frac{11}{2}$: reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propos*. 3. erunt $\frac{22}{4}$, & $\frac{9}{4}$, adeoque $\frac{22}{4}$, $-$ $\frac{9}{4}$ $=$ $\frac{13}{4}$ $=$ 3 $\frac{1}{4}$, per *Prop*. 5.

Shol. *Ut minutiæ addi, vel subtrahi possint, semper idem nomen habere debent, quod notetur.*

PROPOSITIO X.

Fractiones multiplicare.

I. SI multiplicanda est fractio per fractionem, duc inter se numeratores, itemque denominatores inter se, res erit confecta. Multiplicanda sit fractio $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ ductis 2 $\times$ 2, & 3 $\times$ 5, habetur productum quæsitum $\frac{4}{15}$. Sic $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ per *Prop*. 2.

II. Quod si multiplicandus sit integer per fractum, vel fractus per integrum, semper integro suppone unitatem, ut fiat quasi fractio; deinde operare ut supra. Sit multiplicanda $\frac{2}{3} \times 7$, supposita integro unitate, erit $\frac{2}{3}$, $\times$ $\frac{7}{1}$, proinde productum $\frac{14}{3}$.

III. Si vero alter multiplicantium sit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejusdem fracti; ut si multiplicari oporteat 2 $\frac{1}{5}$ per *6*, fiat $\frac{11}{5} \times \frac{6}{1}$, erit productum $\frac{66}{5}$. Similiter si uterque multiplicator sit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejusdem nominis cum minutia sibi adhærente : ut sint multiplicanda 3 — $\times$ 5 $\frac{1}{3}$, 5 $\frac{1}{3}$. reducantur ad fractos, erunt $\frac{22}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{352}{21}$ $=$ *16* $\frac{16}{21}$ per *Prop*. 5.

Demonstr. Ex regula tradita multiplicare fractum *A* per fractum *B* est producere fractum *C*, qui toties contineatur in fracto *B*, quoties fractus *A* continetur in unitate. Nam sicuti fractus *C* continetur bis in fracto *B*, ita fractus *A* bis continetur in unitate, ut patet, ergo ex definitione multiplicationis fractus *C* est productum fracti *A* multiplicati per fractum *B*.

$$A\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\ B\ \ \frac{3}{10}\ C$$

Coroll. Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis *C* sit minus, quam factores *A* & *B*. Nam cum unitas sit ad *A*, ut *B* ad *C* ex *Defin.* multiplicationis per *Prop.* 5. *Cap.* 1.; & unitas major sit quam *A*, etiam *B* major erit quam *C*, proinde *C* minor.

Schol. I. *Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per divisionem, dividendo scilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutiæ (modo divisibiles sint sine residuo); Sint enim multiplicanda* $\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$, *divide 9 per 3, & 10 per 2, fit* $\frac{3}{5}$ *productum quæsitum. Idem enim producitur, ac si more consueto multiplicentur. Nam* $\frac{2}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{50}\ \frac{3}{5}$ per *Prop.* 2.

Schol. II. *Si integrum cum minutia ducendum sit in integrum, quod exacte divisibile sit per denominatorem minutiæ, ut si ducendum sit* $38\frac{2}{3} \times 18$, *practici primo resolvunt integrum in fractum, fitque 116, deinde diviso 18 per denominatorem 3, habetur quotus 6, per quem multiplicant ipsum 116, & habetur productum quæsitum 696. Ratio per se patet.*

Schol.

Schol. III. *Si vero integrum ducendum sit in minutiam, ut* 32000 $\times \frac{6}{5}$, *practici prius dividunt* 32000 *per* 5, *deinde quotum* 6400. *ducunt in* 6.

PROPOSITIO XI.

Fractiones dividere.

I. SI termini divisoris exacte dividant terminos dividendi, fractus, qui inde oritur, erit quotus. Ut si dividenda sit minutia $\frac{4}{9}$ per $\frac{2}{3}$, divisis 4 per 2, & 9 per 3, quotus erit $\frac{2}{3}$. Similiter si denominator sit communis, satis erit dividere numeratorem per numeratorem, deleto denominatore; sic dividendo $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$, quotus erit 3; & dividendo $\frac{7}{8}$, per $\frac{3}{8}$, quotus erit 2 $\frac{1}{3}$. Item dividendo $\frac{5}{6}$ per $\frac{2}{6}$, deleto communi denominatore quotus erit $\frac{5}{2}$.

II. Quod si termini divisoris non exacte dividant terminos dividendi, aut denominator non sit communis, tunc inverte divisorem, ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris, deinde duc tam numeratores inter se, quam denominatores inter se, productum erit quotus quæsitus. Dividenda sit minutia $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{2}$. Inverso divisore, erit $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ quotus quæsitus. Ita si dividere oporteat $\frac{5}{8}$ per $\frac{1}{4}$, hoc est, si dicatur, $\frac{1}{4}$ unius scuti Romani dat $\frac{5}{8}$ unius ulnæ, quot ulnas dabit scutum unum, divisis (inverso divisore) $\frac{5}{8}$ per $\frac{4}{1}$, quotus dat ulnas 2 $\frac{1}{2}$. Nam $\frac{4}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{4}{8}$ per *Prop.* 5. *hujus*.

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, satis est multiplicare denominatorem fracti per ipsum integrum. Sit dividendus $\frac{2}{5}$ per 2, duc 5×2, quotus erit $\frac{2}{10}$. Item $\frac{1}{3}$ divisus per 5, dat quotum $\frac{1}{15}$. Nam semper integro supponitur unitas.

IV. Cum divisor, aut dividendus, vel uterque est integer cum minutia, reducendus est integer ad minutiam sibi adjunctam, ut fiat unica minutia, & operatio instituenda est, ut supra. Sint dividenda $24\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{3}$, fient $\frac{121}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{363}{10} = 36\frac{3}{10}$ per *Propos.* 5. Similiter sint dividenda $15\frac{1}{3}$ per $12\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{46}{3} \times \frac{2}{25} = \frac{92}{75} = 1\frac{17}{75}$.

Demonstr. Dividere fractum *A* per fractum *B* est invenire quotum *C*, ad quem ita sit unitas, sicuti divisor *B* ad dividendum *A* ex divisionis definitione ad *Prop.* 6. *Cap.* 1. Sed unitas est ad fractum *C*, ut divisor *B* ad dividendum *A*. Unitas enim est ad *C*, ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom.* 1. Fractus autem *B* est ad fractum *A*, ut 3 ad 4: nam redactis ad idem nomen *A* & *B* per *Prop.* 3. oriuntur fracti æquales *M* & *N*, qui ob communem denominatorem se habent ut 3 ad 4; ergo unitas est ad *C*, ut *B* ad *A*, proinde *C* est quotus quæsitus. Quod &c.

B	*A*	*C*
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

M	*N*	
$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$1 . \frac{4}{3} :: 3 . 4$

CO-

Coroll. Hinc patet ratio, cur in divisione minutiarum quotus sit major numero ipso, qui dividitur; quod quidem accidit, cum divisor minor est unitate. Nam cum divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando divisor ad unitatem, ut dividendus ad quotum, adeoque si divisor minor est unitate, etiam dividendus debet esse minor quoto.

Schol. I. *Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut 634* $\frac{2}{3}$ *per 5, practici dividunt integrum per integrum, nempe 634 per 5, nulla habita ratione fractionis, ut inveniant quotum 126. Tum si quid remanet (ut hic 4) illud reducunt ad fractionem* per Propos. 6., *hoc est ad* $\frac{12}{3}$, *quam addunt ad fractum* $\frac{2}{3}$; *fitque summa* $\frac{14}{3}$ per Prop. 8, *quæ quidem summa divisa per 5 dat quotum* $\frac{14}{15}$ per hanc Propos. num. 3., *unde quotus quæsitus est 126* $\frac{14}{15}$.

CAPUT IV.

De fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO I.

FRactiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in decem æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias decem partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit; oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, cen-

centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *secundæ*, *tertiæ*, *quartæ* &c. iisque distinguendis apponuntur virgulæ, integris autem cyphra o. Sic fractio decimalis, $\overset{0}{5}.\ \overset{\text{I}}{8}\ \overset{\text{II}}{6}\ \overset{\text{III}}{4}\ \overset{\text{IV}}{2}$ significat quinque integra, octo primas, sex secundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed satis est virgulam ultimam apponere, & integra puncto distinguere, ut $5.\,8\,6\,4\,\overset{\text{IV}}{2}$. Quæ quidem fractio idem valet ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$, seu $\frac{58642}{10000}$. At commodi gratia decimales scribuntur instar integrorum, omisso denominatore, modo supra explicato, nempe $5.\,8\,6\,4\,\overset{\text{IV}}{2}$.

Coroll. I. Hinc sequitur virgulas illas, sive apices decimales, qui numeris apponuntur, esse loco denominatorum; ut in decimali $5.\ \overset{\text{I}}{8}\ \overset{\text{II}}{6}\ \overset{\text{III}}{4}$, apex unus importat denominatorem 100, tres denominatorem 1000 &c. hoc est $\frac{8}{10}\ \frac{6}{100}\ \frac{4}{1000}$.

Corol. II. Itaque decimales ad eandem denominationem facilè reducuntur, addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut si decimalis $3.\ \overset{\text{I}}{5}$ reducenda sit ad secundas, ad tertias, vel quartas &c. scribitur $3.\ 5\overset{\text{II}}{0}$, $3.\ 50\overset{\text{III}}{0}$, $3.\ 50\overset{\text{IV}}{0}$. Valor enim non mutatur, nam $\overset{\text{I}}{5} = 5\overset{\text{II}}{0}$, $\overset{\text{II}}{5} = 5\overset{\text{III}}{0}$ &c. ut julii quinque sunt asses 50.

Coroll. III. Si integro cyphræ quotcumque cum virgulis addantur, ejus valor idem manet; ut si ad 3 addas $00\overset{\text{III}}{0}$, ut fiat $3.\ 00\overset{\text{III}}{0}$, non mutatur integri

gri valor. Significat enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000; nam $\frac{3000}{1000} = 3$.

Schol. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{000}$ $\frac{725}{1000}$, *tunc loco integri ponitur zero, nempe* 0. 8, 0. 24, 0. 725, *quæ æquivalent præcedentibus* $\frac{8}{11}$, $\frac{24}{100}$ *&c.*

DEFINITIO II.

FRactionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0. 5679, & 0. 045, notæ *6* & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet $\frac{6}{100}$ & $\frac{4}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$, Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Coroll.* 1.

DEFINITIO III.

PRogressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes millesimæ, sed partes decimæ, aut centesimæ nullæ sunt; ut $4.\ \overset{I}{2}\ \ \overset{IV}{5}$, ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cyphris impositis supplentur: sic eadem decimalis interpositis duabus cyphris, erit $4.\ 200\overset{IV}{5}$. Similiter $3.\ \overset{II}{5}\ \overset{V}{7}$, fiet $3.\ 0500\overset{V}{7}$. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ scribitur $0.\ 00\overset{III}{5}$,

& $3 + \frac{45}{1000}$ scribitur $3.004\overset{IV}{5}$. Semper enim valor est idem, ut in *Coroll.* 2. & 3. fuit explicatum.

PROPOSITIO I.

Decimales addere, & subtrahere.

Fractiones Decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant per *Defin.* 2.; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua per *Defin.* 3.: deinde additio & subtractio fiat, ut in *Prop.* 2. & 4. *Cap.* 1.

Additionis exempla.

$A\ 3.24\overset{III}{5}$	$5.\overset{I}{2}\overset{III}{7} = 5.20\overset{III}{7}$
$B\ 7.3\overset{II}{9}$	$6.45 = 6.4\overset{II}{5}$
$C\ 10.63\overset{III}{5}$	Summa $11.65\overset{III}{7}$

Ratio horum patet ex dictis: nam si decimales A & B fiant ejusdem denominationis per *Corol.* 2. erunt per *Coroll.* 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$ proinde $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} = C\ 10.63\overset{III}{5}$ *per Defin.* 1.

Sub-

Subtractionis exempla.

$A\ 4.\,5\,7\,2^{III}$	$7.\,4\,4^{I\ III} = 7.\,4\,0\,2^{III}$
$B\ 1.\,2\,9^{II}$	$3\,5^{II\ III} = 0.\,0\,3\,5^{III}$
$C\ 3.\,2\,8\,2^{III}$	*differentia* $7.\,3\,6\,7^{III}$

Ratio plane est eadem ac additionis: nam si decimales A & B ad eandem denominationem reducantur per *Coroll.* 2. erunt per *Coroll.* 1. $A = \frac{4572}{1000}$ & $B = \frac{1290}{1000}$, hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000} = \frac{3282}{1000} = C\ 3.\,2\,8\,2$, per *Defin.* 1.

Schol. *Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimales subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex* 8 *integris tres centesimas, hoc est* $0.\,0\,3^{II}$, *adduntur ad* 8 *duo zeri, ut fiat* $8.\,0\,0^{II}$, *eritque residuum* $7.\,9\,7^{II}$, *ut patet.*

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

FRactiones decimales multiplicantur ut integra per *Prop.* 5. *Cap.* 1., nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utri-

utriusque factoris ; summa enim dat numerum notarum decimalium , quæ numerari debent in producto incipiendo à dextera sinistram versus.

Exempla.

I. $4.0\overset{\text{II}}{5}$	II. $0.74\overset{\text{III}}{5}$	III. $0.00035\overset{\text{IV}}{6}$
$3.\overset{\text{I}}{2}$	$4\overset{\text{II}}{2}$	$0.004\overset{\text{IV}}{8}$
810	1490	2848
1215	2980	1424
$12.96\overset{\text{III}}{0}$	$0.3129\overset{\text{V}}{0}$	$0.000001708\overset{\text{X}}{8}$

Operandi modus ex dictis facile demonstratur. Nam in primo exemplo $4.0\overset{\text{II}}{5} = \frac{405}{100}$ & $3.\overset{\text{I}}{2} = \frac{32}{10}$ per *Defin.* 1. Est autem per *Prop.* 10. *Cap.* 3. $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000} = 12.96\overset{\text{III}}{0}$ per *Defin.* 1. & *Coroll.* 1. quod est ejusdem exempli primi productum.

Ex eodem primo exemplo manifestum est, tres tantum notas decimales in facto abscindi, quia ex factoribus habentur apices tres in reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad sinistram zeri, quot desunt in facto notæ decimales ; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.

Schol.

Schol. I. *Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta; ut si multiplicari oporteat* $\overset{I}{4}\,\overset{III}{5}$ *per* $3.\,\overset{II}{2}$, *primo progressio interpositis zeris fiat integra per* Defin. 3, *hoc est fiat* $\overset{I}{4}\,\overset{III}{5} = 4\;0\;\overset{III}{5}$, & $3\,\overset{II}{2} = 3.\;0\;\overset{II}{2}$, *deinde multiplicando* $4\;0\;\overset{III}{5} \times 3.\;0\;\overset{II}{2}$ *habetur productum* $1.\,2231\overset{V}{0}$.

Schol. II. *Si factorum unus sit numerus integer sine ullo decimali, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus. Sic* $3 \times 4\,2\overset{II}{5} = 12.\,7\overset{II}{5}$.

PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

Fiat divisio, ut in integris fieri solet per *Prop.* 6. *Cap.* 1.; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahe numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium; quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cyphræ, ut in tertio exemplo.

Exempla.

I. $\overset{II}{3})\;0.\,1\,3\,5\,6\,\overset{V}{3}\;|\;4.\,5\,2\,\overset{III}{1}$

II. $5.\,3\,\overset{III}{4})\;1\,8\,8\,6\,\overset{III}{4}\;|\;3.\,\overset{I}{6}$

$3.\,1\,4\,4$

$-\,0\,0$

III,

$$\text{III. } 27.\overset{III}{5}89.)\ 0.3\overset{III}{5}4\ldots\ldots\ \Big|\ 0.0128\overset{v}{3}$$

```
27589
------
  -78110
   55178
  ------
  229320
  220712
  -------
   -86080
    82767
   ------
    3313 &c.
```

Operandi ratio clara est. Nam in primo exemplo per *Defin.* 1. habetur $\overset{II}{3} = \frac{100}{3}$ & $0.1356\overset{v}{3} = \frac{13563}{100000}$, proinde dividendo numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem ac si essent numeri integri, habetur nova fractio $\frac{4521}{1000} = 4.\overset{III}{5}21$ *per Defin.* 1. nempe quotus in primo exemplo inventus.

Schol. *Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra* per Defin. 3. *deinde instituatur divisio, ut supra dictum est.*

PROPOSITIO IV.

Integrum, vel fractum in partes decimales reducere.

I. Esto reducendus in Partes v. g. decimas numerus 6. Ducatur 6 in 10, & producto sub-

subscribatur denominator 10, erit $\frac{60}{10}$, seu 60^{I} *per Defin.* I. Similiter 28 ad centesimas reductus erit $\frac{2800}{100}$, seu $28.\,00.^{II}$

II. Reducenda sit fractio ex. gr. $\frac{3}{5}$ in partes millesimas, ducatur numerator 3 in 1000, & productum dividatur per denominatorem 5, erit $\frac{3000}{5} = 600$, unde apparet $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.\,600^{III}$ *per Defin. cit.*

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur $\frac{3}{7} > 0.\,42857$, sed $> 0.\,42857.$, defectu existente minori quam $\frac{1}{100000}$. Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

Schol. *Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsitæ. Ratio autem operationis habetur ex regula proportionum, de qua inferius. Nam in secundo exemplo est* 5. 3 :: 1000. 600., & *sic de aliis*.

PROPOSITIO V.

Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur quot unicas unius pedis Romani conficiant particulæ decimales 750^{III}. Quia pes

 Ro-

Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem *per Defin.* 1. particulæ $\overset{\text{III}}{750} = \frac{750}{1000}$. Ducantur igitur particulæ decimales 750 in 12, & productum dividitur per 1000. erit $\frac{9000}{1000} = 9$; habentur ergo $\frac{9}{12}$ proinde $\overset{\text{III}}{750} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, seu $\frac{3}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scuti Romani, quod in asses 100 dividitur, contineant decimales particulæ $\overset{\text{IV}}{5610}$. Cum *per Defin.* 1. sint $\overset{\text{IV}}{5610} = \frac{5610}{10000}$, si ducantur 5610 in 200, & productum dividatur per 1000, erit $\frac{61000}{10000} = 67 + \frac{1}{10}$. Continent ergo asses $76 + \frac{1}{10}$, hoc est asses 56, & unius quadrantis Romani semissem. Ratio innititur regulæ proportionum, de qua inferius.

Schol. I. *Simon Stevinus, decimalium auctor ingeniosissimus, eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo, cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus, Præstetus, Reyneau, Wolfius, & alii hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.*

Schol. II. *Ceterum fractiones decimales in omni fere Mathesi magni sunt usus, maxime vero in appro-*

proximatione radicum in Algebra. *Proinde Analyticis nostris Institutionibus hæc ipsa de calculo Decimali notitia fuit tanquam appendix adjecta*.

CAPUT V.

De extractione Radicum.

SI numerus quicumque ducatur in se ipsum, ut 3 X 3 producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicit ad quadratum Geometricum. Item si ducas 4 X 4 oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in se ductis planum illud, seu quadratum oritur, dicuntur *latus* quadrati *seu radix*, & exprimitur hoc signo $\surd$, quod signum *radicale* vocant.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repræsentant corpus æqualiter longum, latum, & profundum, quod a Geometris denominatur *cubus*, & numeri illi 3 & 4, dicuntur *radix*, seu latus cuborum 27, & 64.

Quod si cubus ipse per suam radicem multiplicetur, ut 27 X 3, oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum 81 X 3, oritur *quadrato-cubus*, & sic deinceps. Hæc producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, seu *potestates*; nempe vocant radicem dignitatem, seu potestatem *primam*; quadratum *secundam*, cubum *tertiam*; quadrato-quadratum *quartam*, quadrato-cubum *quintam* &c. quas etiam literis sic exprimunt, a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 &c.

DEFINITIO

Extractio igitur radicis quadratæ, vel cubicæ &c. (seu secundæ, tertiæ, vel quartæ potestatis &c.) est inventio illius numeri, qui semel, bis, ter, vel pluries in se ductus illam potestatem genuit, adeoque ab ipsa potestate denominatur radix secunda, tertia, quarta &c.

Si numerus datus centenarium non excedit, & sit quadratus, ejus radix habetur ex tabella, quæ sequitur; ut si quæratur radix quadrati 64, ejus radix invenitur 8. Quod si numerus non sit quadratus, ut ex. gr. 50, sumenda est ex eadem tabella radix proxime minor, hoc est 7, quæ in se ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Schol. I. *Nota, quadratum majus superare quadratum proxime minus duplo radicis quadrati minoris plus unitate. Sic 16 majus est quadrato 9 duplo radicis 3 + 1, hoc est 7. Item 36 superat 25 duplo radicis 5 + 1, nempe 11.*

Schol. II. *Similiter cubus major ex. gr. 64. superat cubum proxime minorem 27 triplo radicis cubi minoris, ducto in radicem majoris cubi plus unitate, nempe* $9 \times 4 + 1 = 37$, *& sic de aliis.*

PRO-

PROPOSITIO I.

En dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.

Sit numerus *A*, ex quo radix secunda extrahenda sit.

A	1 8 6 6 2 4		*B*
	1 6		432
C	83) — 2 6 6		
	2 4 9		
D	862) — 1 7 2 4		
	1 7 2 4		
	0 0 0 0		

1. Sub ultima figura ad dexteram notetur punctum, deinde sub antepenultima, & sic deinceps, ut totus numerus distribuatur in membra (ut hic tria) quæ continebunt binas figuras, excepto ultimo ad sinistram, si numerus figurarum sit impar, quod unam habebit. Quot erunt membra, tot figuris radix quæsita constabit.

2. Quære ex tabula superiori radicem primi membri ad sinistram, nempe 18, hoc est radicem proxime minorem, scilicet 4, quam pone dextrorsum post lineam, ut in *B*.

3. Duc radicem 4 in se ipsam, & quadratum 16 pone sub ipso membro 18, ex quo subtrahatur; tum residuo 2 (quod notatur infra lineam)

 adde

adde ſequentes duas figuras 66, quæ ſimul faciunt 266.

4. Radicem ipſam 4 duplica, fit 8, quem pone in *D* pro diviſione numeri 26 (excluditur enim ſemper a diviſione figura notata puncto) & quotum inventum 3 appone tum radici in *B*, tum diviſori in *C*, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes numeros in *C* poſitos, & productum 249 ſubſcribe numero 266; a quo facta ſubtractione, remanent 17.

6. Adde huic reſiduo ſequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rurſus inſtitue: nimirum duplica totam radicem *B*, habebis 86, quem pone in *D* pro diviſore numeri 172 (excluſa figura ultima) quotus erit 2, quem appone tum radici in *B*, tum diviſori in *D*, & per ipſam radicem 2 multiplica numeros omnes in *D* 862. Deinde productum 1724 ſubſcribe ipſi numero 1724, a quo debet ſubtrahi; cumque nihil remaneat, ſignum eſt, datum numerum eſſe vere quadratum.

Sit aliud exemplum. Extrahenda eſt radix quadrata ex dato numero *M* 6015625.

1. Dividatur in membra per puncta, incipiendo dextrorſum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad ſiniſtram continet unam figuram nempe 6. Hujus radix proxime minor eſt 2, quam pone in *N* dextrorſus, ejuſque quadratum ſubtrahe ex primo membro 6, remanent 2, quibus adde duas figuras ſequentis membri, nempe 01, fiunt 201.

```
M 6 0 1 5 6 2 5    ( N
  .   .   .   .     2452
  4
  ———
44)  2 0 1
     1 7 6
     —————
Q 485) — 2 5 5 6
         2 4 2 5.
         ————————
S 4902 — 1 3 1 2 5
           9 8 0 4.
           ————————
           3 3 2 1
```

2. Duplica radicem 2, & per ejus duplum 4, quod pone sinistrorsum in *R*, divide 201. (relicta semper ultima figura notata puncto) quotus est 5, qui reponi deberet tum in *N*, tum in *R*, & per ipsum multiplicari numeri in *R*, nempe 45, sed quia 45 X 5 producit 225, quod subtrahi nequit ex numero 201, ut patet, proinde quotus 5 minuitur unitate, & ponitur tam in *N*, quam in *R* quotus 4, qui ductus in 44. producit 176, quod subtractum ex 201 relinquit 25.

3. Adde huic residuo duas sequentes figuras 56, efficiunt 2556. Repetenda est eadem operatio toties quot restant membra in dato numero. Nimirum duplicanda est radix 24, & per ejus duplum 48, quod ponitur sinistrorsum in *Q*, dividenda sunt 225 (relicta ultima figura) quotus 5 est nova radicis figura quæ ponitur in *N*, tum etiam in *Q*, & per ipsam multiplicando omnes figuras in *Q* existentes, habetur productum 2425 subtrahendum ex 2556, factaque

tractione, habetur residuum 131. Cui adde ultimas duas figuras 25, & operare ut supra, invenies ultimam radicis figuram 2, quam pone in N & S, ac cetera prosequere ut sæpius dictum est.

Est igitur radix quæsita N 2452, & remanent 3321, adeoque numerus datus non est revera quadratus.

Corol. Hinc patet, radicem inventam per divisionem unitate esse minuendam, si productum, quod fit ex multiplicatione, majus sit numero, a quo subtrahi debet; ut in secunda figura radicis inventæ factum est: quod quidem notetur.

Schol. I. *Quando divisor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cyphra, seu zero, ut si extrahenda sit radix quadrata ex 4714. Quia sublato ex primo membro 37 quadrato 36 radicis inventæ 6, remanet 1, cui si addatur sequens figura 1 fit 11. (Nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis) qui numerus dividi nequit per duplum radicis 6, nempe 12; in hoc casu ponitur in radice cyphra 0, eritque radix 60, & habetur residuum 144, cui adduntur statim (si sint) aliæ duæ figuræ dati numeri.*

Schol. II. *Si numerus datus non est quadratus, sed remanet residuum, ut in allato exemplo residuum 114; tunc fit ex residuo fractio, in qua residuum ipsum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radicis inventæ. Si vero residuum sit majus ipsa radice, tunc duplo radicis inventæ additur unitas: Sic in eodem exemplo, quia residuum 144 majus est tota radice 60, addita unitate ad duplum ipsius radicis, erit fractio* $\frac{144}{121}$, *ac tota radix* 60 + $\frac{144}{121}$ ex Sch. 1. pag. 68.

Schol.

Schol. III. *Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam 2, vel 3, vel 7, vel 8, vel cyphram unam; sed necesse est, ut sit una ex his 1, 4, 5, 6, 90, 00, quibus constant numeri simplices quadrati.*

Schol. IV. *Extractio radicis quadratæ non est aliud nisi quædam divisionis species, ut ex ipsa operatione manifestum est; hoc tamen discrimine, quod in divisione communi divisor est numerus datus, in hac vero debet inquiri divisor, & quidem per plures partes, quæ sunt ipsa radix. Proinde multiplicando radicem per se ipsam, v. g. in primo exemplo 432 X 432, restituitur numerus quadratus 186624, ut fieri solet in divisione communi, ducendo quotum per divisorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando scilicet per se ipsam radicem inventam, & addendo residuum, si forte sit.*

Demonstr. Pendet à *Prop.* 4. *lib.* 2. *Eucl.* Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex 432 X 432, continet primo quadrata partium 4, 3, 2. Secundo, bis rectangulum 4 X 3. Tertio, bis rectangulum ex 43 X 2, seu rectangulum ex duplo ipsius 43, nempe 86 X 2; quod patet ad oculum, nempe.

```
1 6 . . . .
  1 2 . . .
  1 2,9 . .
      8 6 .
      8 6,4
-----------
1 8 6 6 2 4
```

Ex speciosa tamen id longe clarius appatet, si loco numerorum 4, 3, 2, sumantur literæ *a* + *b* + *c*; ut in nostris *Instit. Analyt.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Radicem quadratam per approximationem inquirere.

Extracta radice quadrata, si quid remanet, signum est, talem numerum non esse revera quadratum neque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi possit. Quamvis autem vera radix sit impossibilis; potest tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magisque approximari, ita ut excessus, vel defectus a vera radice sit minimus. En praxis.

Adde numero, qui remanet post extractionem radicis, vel numero ipsi, a quo extracta fuit radix, tot cyphrarum paria, quot volueris, nempe 00, seu 0000, 000000 &c. & ex numero residuo una cum prædictis cyphris extrahe radicem secundam, ut moris est. Aufer deinde ex radice tot figuras (a dextera incipiendo) quot fuerunt paria cyphrarum additarum: Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem una cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablatæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot paria fuerunt addita.

Sit exemplum. Extrahenda est radix ex numero 12, patet radicem esse 3, & remanere 3. Adde ipsi 12 tria cyphrarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero secunda radice *per Propos. 1. hujus* invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cyphrarum paria addita, erit radix $3\frac{464}{1000}$ vera quidem minor, sed propinquior, & exactior, quam radix primo inventa.

Schol. I.

Schol. I. *Si numero, ex quo radix secunda extrahitur, minutia adhæreat, reducitur minutia in partes centesimas, & extrahitur radix. Extrahenda sit radix ex 6 $\frac{1}{4}$, reduc fractionem in centesimas* per Propos. 4. Cap. 3. *erit fractio* $\frac{25}{100}$, *cui adde 6, fit* $\frac{625}{100}$ *cujus radix quadrata erit* 2 $\frac{5}{10}$

Schol. II. *Quod si denominator minutiæ, quæ integro adhæret, sit numerus quadratus, poterit numerus integer ad unam cum ipso minutiam reduci, & inde extrahi radix. Sic in superiori exemplo 6* $\frac{1}{4}$ *fiet* $\frac{25}{4}$, *extractaque seorsim tum ex denominatore, tum ex numeratore radice, habetur* $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, *ut antea. Unde patet modus extrahendi radicem quadratam ex meris fractionibus, quæ numeris quadratis constant.*

Schol. III. *Si vero denominator fractionis, ex qua radix erui debet, non sit numerus quadratus, ut si data sit fractio* $\frac{3}{7}$; *tunc multiplicato numeratore per denominatorem, extrahitur ex facto radix, cui supponitur ipsemet denominator. Erit igitur datæ fractionis radix* $\frac{\sqrt{21}}{7}$. *Ratio est, quia* $\frac{3}{7} \times 7 = \frac{21}{49}$ per Ax. 3. Cap. 3. *Æqualium autem fractionum æqualis est radix, proinde* $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Schol. IV. *Fractio non quadrata fieri potest quadrata per divisionem, vel multiplicationem. Sic* $\frac{3}{27}$ *divisa per 3 fit* $\frac{1}{9}$ per Ax. 3. *Similiter* $\frac{2}{8} \times 2$ *fit* $\frac{4}{16}$ per idem Ax. *Ex quibus habetur radix quadrata, ut patet. Ceterum tam pro integris, quam pro fractis radix maxime propinqua haberi potest per Logarithmos, de quibus inferius.*

PRO-

PROPOSITIO III.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere.

1. Divide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorſum, ita ut ſingula membra contineant tres figuras, excepto primo membro, quod aliquando duas, vel unam tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radicis inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri ſiniſtrorſum, ſi ſit numerus cubicus; ſin minus, ſume radicem cubi proxime minoris in tabella ſuperius poſita quæ in hoc exemplo eſt 2, quam pone ad dexteram ut in *B*.

3. Ex hac radice fiat cubus 8, quem ſubtrahe ex primo membro 12, & reſiduum 4 ſcribe infra lineam ut in *C*.

4. Ad hunc reſiduum adde unam ſequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radicis figura, quam pone in *B*.

V. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui ſubtrahi debet ex utroque membro numeri *A*. Cumque nihil remaneat, ſignum eſt, numerum datum eſſe revera cubum.

	A 12, 167	(*B*
	8	23
12)	*C* 41	

Hæc operatio toties repeti debet, quot ſunt mem-

membra numeri dati, ut in sequenti exemplo erit manifestum.

Sit aliud exemplum. Esto numerus *M* 11390625, cujus radix cubica quæritur.

1. Radix cubica primi membri 11 est 2, quam pone in *N*, ejusque cubum 8 subtrahe ex 11, remanet 3, quem scribe infra lineam in *R*.

2. Adde residuo *R* sequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radicis inventæ 2, hoc est per 12, quotus 2 erit secunda figura radicis, quam pone in *N*.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero *S* 11390, nempe ex duobus membris numeri dati *M*, remanent 742, ut in *T*.

4. Ad hoc residuum *T* addatur ex tertio membro numeri *M* figura 6, fiet 7426, qui divisus per triplum quadrati radicis inventæ 22, hoc est per 1452, dat quotum 5, qui ponatur in *N*, eritque tertia radicis figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe 11390625, qui ablatus ex numero *M* nihil relinquit, proinde numerus datus est cubus.

M 1 1, 390, 625 (*N* 225
8
———
12) *R* 33
S 1 1 3 9 0
1 0 6 4 8
———————
1 4 5 2) *T* — 742, 6

Ratio autem pendet ab ipsa cuborum genesi. Nam in priori exemplo cubus 12167, qui oritur ex radice 23, continet primo cubos 8 & 27,

27, partium 2. & 3. Secundo triplum quadrati radicis 2 $\times$ 3. Tertio triplum quadrati radicis 3. $\times$ 2, hoc est.

$$\begin{array}{r} 8\ .\ .\ . \\ 36\ .\ . \\ 54\ . \\ 27 \\ \hline 12167 \end{array}$$

Coroll. Hæc praxis omnium facillima, traditur a Nevvtono in *Arithm. Univ.*, & tribus paucissimis continetur. 1. Ad residuum, quod oritur ex subtractione cubi ex unoquoque numeri dati membro, additur una tantum sequentis membri figura. 2. Diviso illo residuo una cum figura adjecta per triplum quadrati inventæ radicis, quotus dat alterius membri radicem. 3. Ex numeris radicalibus (quotquot illi sint) fit cubus, qui subtrahitur ex totidem membris numeri dati, quot sunt ipsi numeri radicales inventi. Quæ quidem ex allatis exemplis satis patent.

Schol. I. *Cum aliquid remanet, signum est, numerum datum non esse exacte cubicum, ac proinde radicem inventam non esse numeri dati, sed maximi cubi in eo contenti. Residuum exprimitur per fractionem hoc pacto: residuum ipsum ponitur super lineam loco numeratoris; pro denominatore autem sumitur differentia inter cubum datum, & cubum proxime majorem minus unitate. Sit exemplum, extracta radice cubica ex numero 46, habetur radix 3, & residuum 19, quod erit fractionis numerator; differentia autem inter cubum 27 ex radice 3, & cubum proxime majorem 64 ex radice 4, est 36,*

+ 1

+ 1 per Schol. 2. ad Defin. *Auferatur unitas, remanent 36 pro denominatore fractionis. Est ergo radix cubica numeri dati* 3. + $\frac{9}{16}$.

Schol. II. *Si quis propinquiorem radicem, & quæ a vera insensibiliter differat, cupit, addat aliquot cypharum ternarios ad ipsum numerum datum, & prosequatur radicis extractionem. Deinde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figuræ, quot cypharum ternarii fuerunt adjecti; reliquæ enim figuræ dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipsæ figuræ rejectæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot ternarii cypharum fuerunt additi, eo fere modo, quo de radice quadrata diximus.*

Schol. III. *Ceterum tam cubica, quam aliæ superiorum potestatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur, maxime per formulas Newtonianas, quæ generales sunt, & ad omnem radicem extrahendam valde faciles, & expeditæ. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.*

Examen habetur ter ducendo in semet radicem cubicam inventam, & addendo illi residuum, si quod fuit. Restituitur enim cubus, seu numerus datus, si erratum non sit.

PROPOSITIO IV.

Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.

EX dictis satis patet ratio extrahendi radices ex fractionibus communibus. Pro Decimalibus autem peculiaris est regula.

I. Si

I. Si extrahenda sit radix quadrata, observetur, an decimalis dati apex maximus sit par, ut in *A*; tunc enim extrahitur radix omnino, ut ex integris per *Prop.* 1. *hujus*; & prima radicis nota afficitur apicis maximi dimidio, ut in *B*.

Si vero apex maximus sit impar, ut in *C*, adjecta cyphra, fiat par, ut in *D*, extractaque radice, ut supra, habetur radix quæsita, ut in *E*.

II I *A* 23. 04 (48 *B*	III *C* 22. 500 IV II *D* 22. 5000 (1. 50 *E*

Patet ratio, cur prima radicis nota affici debeat dimidio apicis maximi decimalium. Nam si sit quadratum unitas cum cyphris 2, 4, 6 &c. ut 10000, 1000000 &c. unitas ipsa cum dimidio ejusmodi cyphrarum erit radix quadrata, nempe 10, 100, 1000 &c. Cum igitur apices stent loco denominatorum per *Coroll.* 1. *Cap.* 4. constat propositum.

II. In extractione autem radicis cubicæ observetur an apex maximus decimalium trisecari possit, ut contingit in *M*; tunc enim extrahitur radix cubica, ut ex integris per *Prop.* 3. *hujus*, & prima radicis nota afficitur apicis maximi triente, ut in *N*.

Si vero maximus apex trisecari nequeat, ut vides in *R*; adjice unam, vel duas cyphras, ut trisecari possit, ut in *S*; tum extrahe radicem cubicam *T*, ut supra.

III *M* 1. 738 (1. 2. *N*	IV *R* 26. 2144. VI II *S* 26. 214400 (0. 64 *T*

De-

Demonstr. similis est præcedenti. Nam si fiat cubus ex unitate cum aliquot cyphrarum ternariis, ut 100, 1000000 &c. unitas ipsa cum cyphrarum triente erit radix cubica, nempe 10, 100 &c. proinde prima radicis cubicæ nota afficitur triente maximi apicis, cum apices sint loco denominatorum, ut dictum est per *Coroll. supra citatum*.

PROPOSITIO V.

Quæstiones aliquot resolvuntur per radicis quadratæ, vel cubicæ extractionem.

1. DUX exercitus habet strenuos milites 1326, quos omnes in acie quadrata ad prælium ordinare vult; quæritur, quot milites in fronte, seu latere stabunt, & quot futuri sint ejus agminis ordines.

Ex dato numero 1326 extrahatur radix quadrata per *Prop.* 1. *hujus*, quæ erit 36 cum residuo 30. Constabunt igitur singuli ordines militibus 36, eruntque ordines pariter 36. Remanent autem milites 30. Proinde ut ipsi quoque in acie disponantur, augeri debet quadrati latus unitate, ita ut singuli ordines habeant milites 37. Itaque duplicetur radix 36, fit 72, additaque unitate habetur 73, numerus scilicet militum addendorum ad quadratum lateris 36. Sed 30 jam supererant, ergo 43 tantum erunt addendi ad numerum 1326, ut fiat 1369, numerus quadratus cujus radix 37. Hoc patet ex *Schol.* 1. *hujus*.

2. Est turris alta pedes 100, quæ in ambitu habet fossam latitudinis pedum 40, fabricanda est scala quæ ab ulteriore ripa pertingat ad cacumen turris, quæritur ejus longitudo.

Fiant quadrata numerorum 100, & 40, quæ simul addantur, fit summa 11600. Hinc extrahe radicem quadratam, erit scalæ fabricandæ longitudo pedum 107 4 $\frac{1}{2}\frac{5}{1}\frac{}{5}$ per *Prop.* 1. *& Schol.* 2. *ejusdem.*

3. Volo fieri circulum duplum, triplum, quadruplum &c. alterius circuli dati, seu cujus nota est diameter in aliqua mensura.

Sit diameter circuli dati pollicum 6, lin. 5, & quæratur circulus ejus duplus. Reducantur pollices ad lineas, eos multiplicando per 12, & addendo producto lineas 5, fient lineæ 77, quarum duplum est 154, qui numeri inter se multiplicentur, & ex producto 11858 eruatur radix quadrata, quæ invenitur 108 + $\frac{9}{1}\frac{7}{0}\frac{}{8}$ per *Propos.* 1. Circuli ergo dupli diameter erit linearum 108 + $\frac{}{1}\frac{9}{0}\frac{7}{8}$, hoc est pollicum 9 + $\frac{9}{1}\frac{7}{0}\frac{}{8}$ unius lineæ.

Schol. *Quod de circulo dictum est, extenditur quoque ad quodlibet Polygonum regulare, nempe Quadratum, Pentagonum, Exagonum &c. si eorum duplum, triplum, quadruplum inveniri oporteat, dato uno ipsorum latere. Sed hæc ad Geometriam pertinent*, & a Prop. 20. l. 6. Eucl. *derivantur*.

4. Fabricanda est cisterna cubica, quæ contineat aquæ pedes cubicos 68921, quæritur quanta futura sit ejus latitudo, longitudo, ac profundum.

Ex numero 68931 extrahatur radix cubica, quæ per *Prop.* 3. *hujus* dat pedes 41, unde innotescunt omnes ipsius cisternæ dimensiones.

5. Datâ diametro globi ferrei, lapidei, vel plumbei, qui libram unam ponderat, quæritur diameter pro globo ejusdem materiæ librarum 2, 3, 4, 5 &c.

Diameter data intelligatur divisa in partes 100, erit ejus cubus 1000000. Tum ejusdem cubi duplo, triplo, quadruplo &c. nempe 2000000, 3000000, 4000000 &c. radix cubica extracta per *Prop. cit.* dabit

bit diametrum quæsitam globi librarum 2, 3, 4 &c. Seu, cubus diametri datæ ducatur in pondus, seu in numerum librarum globi, cujus diameter quæritur, & extrahatur ex producto radix. Invenienda sit diameter globi plumbei librarum 8; cubus 1000000 $\times$ 8 $=$ 8000000, cujus radix cubica 200 dat diametrum quæsitam. Hæc est *regula calibræ*, cujus ope ex data diametro globi unius libræ, diametri reliquorum globorum ejusdem materiæ determinantur; & hinc quoque innotescit tormenti bellici cavitas, seu diameter.

6. Depopulante sævissima lue Athenas, consultus fuit Apollo Delius, quo pacto illa cessaret; respondit, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Hinc ortum est celebratissimum de duplicatione cubi problema.

Fuerit igitur ejus cubi latus palmorum 12, cujus duplum 24. Fiat ex 12 quadratum, quod multiplicetur per 24, erit 12 $\times$ 12 $=$ 144 $\times$ 24 $=$ 3456. Extrahatur hinc radix cubica, quæ dat palmos 15 $+ \frac{}{7}\frac{8}{2}\frac{1}{0}$ ($= \frac{}{8}\frac{6}{c}$). Igitur ara illa cubica fabricari debet ex latere palmorum 15 cum fractionibus, proinde problema erit practice, non autem Geometrice solutum, quod ab oraculo petebatur. Ratio hujus, & præcedentis pendet *ex Prop. 18. l. 12. Eucl. & Prop. 12. Cap. 6. sequentis*, quæ hujus loci non sunt. Sed hæc pauca sufficiant ad indicandum usum extractionis radicum, qui in universa fere Mathesi in immensum patet.

CAPUT VI.

De Regulis Arithmeticis.

Regulæ Arithmeticæ sunt quatuor. 1. Est regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Positionis, vel falsi. Prima est omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla sunt de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

DEFINITIONES.

I. Ratio, sive *proportio* est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo. Ut si compareтur 12 ad 4, intelligitur 12 continere ter 4, & habere rationem tripli: alter terminus dicitur *antecedens*, alter *consequens*.

II. Duæ rationes dicuntur *similes*, *eædem*, vel *æquales* (quod idem est), cum antecedens unius toties continet suum consequentem, quoties antecedens alterius continet suum consequentem. Vel cum antecedens unius toties continetur in suo consequenti quoties antecedens alterius continetur in suo consequenti. Sic 12 . 4 :: 3. 1. sunt rationes similes, vel eædem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent suos consequentes 4 & 1, & 4. 12 :: 1. 3. dicuntur similes, quia 4 & 1 ter continentur in suis consequentibus 12 & 3.

III.

III. Quatuor illi termini, seu quantitates eandem rationem habentes, ut 12.4 :: 3.1. dicuntur *Proportionales*. Et si termini medii bis sumantur, ita ut eadem quantitas semel sit consequens respectu præcedentis, & semel antecedens respectu consequentis, ut 2, 4, 8, in quibus 4 bis sumitur, dicuntur *continue Proportionales*. Si vero nullus terminus bis accipitur, ut 10. 5 :: 2. 1. dicuntur termini *discretim proportionales*.

LEMMATA.

I. Si quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale est facto ex secundo, & tertio. Est *Prop. 19. l. 7. Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5. 20 :: 4. 16

Sicuti 5×16 dant $= 80$

Ita etiam 20×4 dant $= 80$

II. Si datis quatuor numeris, primus se habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, factum ex primo, & secundo æquale erit facto ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 est eadem proportio dupla, quæ est inter 8 & 4, erit $6 . 3 \div 8$ & 4; ergo *ex lem.* 1. $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$; ergo factum ex primo, & secundo æquatur facto ex tertio, & quarto.

III. Si factum dividatur per unum ex suis factoribus, prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v. g. 24, quod ortum sit ex 4×6, si dividatur per 6 oritur 4.

PROPOSITIO I.

De Regula Proportionum.

Regula *Proportionum*, quam ob præstantiam & immensam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum ignotum proportionalem, qui nimirum habeat eandem proportionem ad tertium numerum datum, quam secundus habet ad primum; ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quartum. En praxis.

I. Disponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæstionem habet annexam, statuatur tertio loco; ille vero ex duobus aliis, qui cum hoc est homogeneus, hoc est qui eandem rem significat, ac terminus tertio loco positus, primo loco ponatur.

II. Multiplica tertium per secundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæsitum. Res tribus exemplis illustratur.

1. Ulnæ panni 3 stant scutis 9, quot scutis stabunt ulnæ 12 ejusdem panni? terminum qui habet annexam quæstionem, sunt ulnæ 12: hic statuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, scilicet.

Ulnæ 3. *scut.* 9 :: *ulnæ* 12. *scut* ...:

Duc 12 $\times$ 9, & productum 108 divide per 3; quotus 36 dat quartum proportionalem quæsitum. Nam, ut patet.

3. ::

3. 9 :: 12. 36.

2. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet operario quotidie solvisse tantum asses 10. Quot scuta Romana singulis diebus expendit?

Si oper. 1. *asses* 10. *quid. oper.* 180000.

Multiplicatis 180000 $\times$ 10, producitur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto proportionali asses 1800000. Hos divide per 100 (resectis duabus cyphris) fiunt scuta Romana singulis diebus solvenda 18000.

3. Fixarum motus ex Ricciolio & Flamsteedio singulis 100 annis procedit gr. 1. 23^{I}. 20^{II}, quot anni requiruntur ad totum cœli ambitum, seu gr. 360 percurrendos? Primo gr. 1. 23^{I}. 20^{II} reducantur ad minuta secunda per multiplicationem, scilicet $1 \times 60 + 23 = 83 \times 60 = 4980 + 20$ fiunt 5000. Similiter gr. $360 \times 60 \times 60$ fiunt 1296000. Dic jam, si minuta secunda 5000 dant annos 100, quot annos dabunt minuta secunda 1296000? Invenientur per regulam auream anni 25920, qui nimirum annum Platonicum conficient.

5000. 100 :: 1296000. 25920.

Coroll. Ex hoc exemplo manifestum est, terminos proportionales regulæ aureæ, antequam regula ipsa instituatur in homogeneos esse reducendos, si forte numeris heterogeneis constent. Sic si di-

 ca-

catur, libræ 5 unc. 3. veneunt ſcutis 4, & aſſibus 50, quot ſcutis ſtabunt libræ 12? Libræ reducendæ ſunt ad uncias in primo & tertio termino, & ſcuta ad aſſes, & tres termini proportionales erunt unciæ 63, aſſ. 450, unc. 144.

Scol. *Cum integris adhærent fracti, prius integri reducuntur ad fractos: integris autem, quibus nulla eſt fractio, ſupponitur unitas; deinde regula proportionum fit, ut dictum eſt. Si dicatur hora* $1\frac{1}{4}$ *fluunt ex aliquo canali libræ* 15 *aquæ, quot libræ fluent horis* $2\frac{1}{5}$? *Termini proportionales redacti erunt* $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{11}{5}$. *Tum operando juxta præcepta tradita in* Prop. 10. & 11. Cap. 3. *invenies aquæ libras* $26\frac{2}{5}$.

Demonſtr. clare infertur *ex lemm.* 1. *&* 3. Nam cum in regula proportionum ſupponantur dari tres numeri proportionales, & quartus, qui eſt ignotus, dari poſſit; factum ex ſecundo, & tertio, æquale erit (*per lem.* 1.) facto ex primo, & quarto, qui eſt ignotus. Proinde ſi factum ex ſecundo, & tertio dividatur per primum, innoteſcet quartus terminus (*per lem.* 3.); ergo patet ratio, cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per ſecundum terminum, & factum dividi per primum.

Examen regulæ proportionum omnium expeditiſſimum habetur multiplicando primum terminum per quartum, & ſecundum per tertium. Nam ſi producta ſint æqualia, res bene proceſſit. Ratio patet *ex lem.* 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

De regula proportionum Composita.

REgula proportionum *Composita* dicitur, cum præter tres terminos in *Prop. præc.* explicatos, alii quoque minus principales accedunt, qui significant tempus, lucrum, damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur, ut fiant tres solum termini. Exempla rem declarabunt.

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10. aureos 50: quæritur quot aureos solvere debeant juvenes 12 diebus 30? Tres principales termini sunt juvenes 4, aurei 50, & juvenes 12. Ad juvenes 4 spectant dies 10, & ad juvenes 12 dies 30. Duc itaque 4 $\times$ 10, & 12 $\times$ 30, habentur duo termini compositi 40, & 360. Dic ergo

Si 40. *dant aur.* 50, *quid* 360?

Multiplicando 360 $\times$ 50, & productum dividendo per 40, ut in *præc. Prop.* factum est, invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis transvectæ Romam per milliaria 300 poscunt scuta 40; quæritur expensa pro transvehendis libris 500 ejusdem mercis per milliaria 500? Tres termini principales sunt libræ 200, scuta 40, & libræ 500. Minus principales sunt milliaria 300, & 500; qui si multiplicentur per suos terminos principales, fient tres termini pro regula trium instituenda, nimirum

60000.

60000. 40 : : 20000. 133 $\frac{1}{3}$

Schol. I. *Regula proportionum composita est regula simplex proportionum repetita ; unde etiam regula* Dupli *dicitur, quia duplicem quæstionem involvit. Proinde resolvi etiam potest in duas regulas simplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quæritur quartus proportionalis ; in altera vero ponuntur circumstantiæ, seu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus ; sic in superiori exemplo dic, si libræ* 200 *exigunt scuta* 40, *quid libræ* 400 *? Quartus proportionalis est* 80, *ut patet . Dic secundo si milliaria* 3000 *dant* 80, *quid milliaria* 500 *? Invenitur quartus proportionalis, ut supra,* 133 $\frac{1}{3}$.

Schol. II. *Hæc regula dicitur etiam* del Cinque, *quia terminos quinque notos supponit. Examen fit ut in* præc. prop.

PROPOSITIO III.

De regula proportionum Inversa.

IN regulis proportionum tum simplici, tum composita jam explicatis, ita se habet primus terminus ad secundum, sicuti tertius ad quartum ut exempla allata satis monstrant ; proinde ex *Prop.* 14. *lib.* 5. *Eucl.* si primus terminus major, vel minor est tertio, etiam secundus major, vel minor esse debet quarto, ut consideranti patet. Solet autem nonnunquam accidere ex ipsa natura quæstionis, ut quanto major, vel minor primus terminus est tertio, tanto major, vel minor re-

reciproce esse debeat terminus quartus secundo. In hoc casu regula proportionum dicitur *inversa*, quia scilicet terminorum ordo invertitur. Hærent hic tyrones primo, non bene dignoscentes, utra regula sit adhibenda. Sed quæ sequuntur exempla, rem satis illustrant.

1. Messores 20 segetem aliquam metunt diebus 4, quæritur quot diebus illam metere possint messores 10? Patet majori tempore, adeo, ut quanto major est terminus primus tertio, tanto major quoque debeat esse quartus incognitus secundo. Nam.

Mess. dies Mess. dies
20. 4 :: 10. 8.

2. In obsessa Urbe ali possunt milites 1500 mensibus 3, quæritur quot milites ali poterunt mensibus 6? Certe minor numerus. Proinde quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor quartus erit secundo, scilicet.

Mens. Mil. Mens. Mil.
3. 1500 :: 6. 750.

3. Ex panno habente latitudinem palmorum 3 requiruntur mihi pro vestimentis ulnæ 10, quæritur quot ulnæ requirantur ex alio panno, qui latitudinem habet palmorum 4. Certum est, pauciores requiri, adeoque quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor erit quartus secundo, nempe

lat.

lat. pal.	*uln.*	*lat. pal.*	*uln.*
3.	10 ::	4.	$7\frac{1}{2}$

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inversa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per secundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis 20 X 4, productum 80 dividatur per 10, habetur quartus proportionalis 8.

Demonstr. sequitur *ex* 2. & 3. *lemm.* Nam in regula proportionis inversa cum se habeat primus terminus ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, erit *ex* 1. *lemm.* productum ex primo & secundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus scilicet tertio loco positus; ergo si per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & secundo, prodibit *ex lemm.* 3. quartus proportionalis quæsitus.

Examen itaque regulæ inversæ fit brevissime, multiplicando primum terminum in secundum, & tertium in quartum. Nam si producta sint æqualia, res bene peracta est.

Schol. I. *Arithmetici in quibus Tacquet, assignant dignoscendæ hujus regulæ indicium hujusmodi. Cum proponitur aliqua res diversa a quatuor terminis quæstionis, tunc proportio erit reciproca, seu inversa. Sic in primo exemplo proponitur seges metenda, quæ est res omnino diversa a quatuor terminis proportionalibus. In secundo exemplo proponitur annona, quæ est res diversa a quatuor terminis ejusdem quæstionis. Similiter in tertio vestis conficienda, quæ proponitur, est quid diversum a ter-*

a terminis in quæstione datis. Hoc dictum sit in gratiam tyronum. Ceterum ex ipsa quæstionis natura facile dijudicari potest, utrum proportio directa sit, an inversa.

Schol. II. *Si terminus, qui annexam habet quæstionem, ponatur primo loco, secundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inversa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo messores 10 se habent ad messores 20, ut dies 4 ad dies 8, provide ducendo 20 X 4, & dividendo productum 80 per primum terminum 10, habetur quartus proportionalis, ut in* Propos. 1. hujus. *Similiter in secundo exemplo menses 6 ad menses 3 ita se habent, ut milites 1500 ad milites 750, adeoque ex producto 3 X 1500 diviso per primum terminum 6, oritur quartus proportionalis 750, ut antea.*

Schol. III. *Regulam inversam compositam ultro omittimus, quod tyrones haud parum soleat confundere, & in rebus Geometricis, vel etiam in hominum commercio vix unquam occurrat.*

PROPOSITIO IV.

Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.

CUM in regula directa primus terminus præcise continet secundum, vel (quod idem est) præcise continetur in secundo, tunc reduci potest proportio ad minimos terminos *per Propos.* 2. *Cap.* 3, & regulæ praxis brevissima evadit. Sit exemplum, lib. 4. valent scuta 12, quot libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos 1 & 3, dic, si 1 dat 3, quid 9? & ducendo 3 X 9, ha-

9, habetur quartus proportionalis 27, qui unitas non dividit.

Pro regula inversa in primo exemplo *Prop.* 3. Si messores 20 exigunt dies 4, quid messores 10? Quia 20 ad 10 se habere debet reciproce, ut quartus terminus ad secundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic si 2 dat 4, quid 1? ductisque 2×4, habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad evitandum divisionis prolixioris tædium dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in secundum: vel dividatur secundus per primum, & quotus ducatur in tertium, in utroque enim casu operatio fit brevior. Ut si leucæ 25 dant milliaria Italica 60, quid leucæ 100? Divisis 100 per 25, duc quotum 4×60, erit 240 quartus proportionalis quæsitus. Vel diviso 60 per 25, quotus $2\frac{2}{5}$ ducatur in 100, productum $\frac{1200}{5}$, seu 240, erit quartus proportionalis quæsitus.

III. Regula proportionum confici potest per solam divisionem, nimirum dividendo primum terminum per secundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2. gradus circuli maximi terræ continent milliaria Italica 120, gradus 360 quot milliaria continebunt? Diviso primo termino per secundum, habetur $\frac{3}{120}$ hoc est $\frac{1}{60}$; per hunc divide 360, quotus $\frac{31600}{1}$ dat milliaria Italica quæsita.

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur $12\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales sine fractionibus 25, 4, & 40. Si afficiant solum secundum terminum, ut 6 dant $20\frac{1}{4}$, quid

quid 10? Satis est multiplicare per eundem denominatorem 3 primum & secundum terminum, erunt termini proportionales 18, 61, & 10. Similiter si fractiones ejusdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut si dicatur $3 \frac{2}{5}$ dant 20 quid $10 \frac{3}{5}$? Multiplicatis iisdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula sine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Si termini sibi respondentes sint minutiæ ejusdem nominis, ut $\frac{1}{3}$ dat 20 quid $\frac{1}{3}$? Delectis denominatoribus erunt termini proportionales 2, 20, 1. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, satis patet.

Schol. *Hæc, aliaque similia compendia dicuntur* Italica, *vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia usum habeant frequentiorem.*

PROPOSITIO V.

De Regula Societatis.

Regula, quæ docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturæ societatem ineuntes frequenter adhiberi soleat.

Sint mercatores *A*, *B*, *C*, qui societate inita lucrati sunt aureos 800. *A* posuit in sortem communem aureos 100, *B* aureos 160, *C* vero 240: quæritur quantum quisque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam summam singulorum pecuniam, nempe aureos 500. Deinde instituatur toties regula proportionum, quot sunt singulorum pecuniæ, ita ut primus terminus semper statuatur sum-

summa pecuniæ collatæ, secundus lucrum aureorum 800, tertius vero uniuscujusque pecunia *A*, *B*, *C*.

Dic ergo si 500 dat 800, quid 100? 160
quid 160? 256
quid 240? 384

800

Patet lucrum *A* fuisse aureorum 160, lucrum *B* 256, & *C* 384, quæ simul efficiunt summam lucri adeoque statim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotiatione, quam pecunia alterius, tunc uniuscujusque pecunia multiplicari debet per suum tempus. Cetera peragenda, ut supra.

Sit exemplum. A posuit in sortem communem aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, *C* vero aureos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500, quæritur singulorum lucrum. Duc. 50 $\times$ 2, 100 $\times$ 3, & 200 $\times$ 1, producta dant summam 600: quæ erit primus terminus proportionum: secundus lucrum comparatum aureorum 500; tertius vero pecunia singulorum per suum tempus multiplicata.

Dic ergo si 600 dant 500, quid 100? $83\frac{1}{3}$
quid 300? 250
quid 200? $166\frac{2}{3}$

500

Est igitur lucrum ipsius *A* aureorum $83\frac{1}{3}$. Lucrum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum $166\frac{2}{3}$, quæ addita faciunt aureorum summam 500.

III. Quod si singulorum pecunia æqualis fuit, tempus autem inæquale? Nam *A* reliquit in societate pecuniam suam mensibus 7, *B* vero mensibus

ſibus 6, C denique menſibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam ſummam menſes, faciunt 25, eritque hic primus regulæ terminus, ſecundus erit lucrum, tertius menſes ſingulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, ſecundi 240, tertii 480.

Si menſes aur. quid menſes

25.	1000. : :	7?	280
		6?	240
		12?	480
			1000

Coroll. Hinc apparet modus dividendi pecuniam v. gr. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino ſuo ſervierunt, quorum primus ſerviverit annis 7, ſecundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ ſimiles quæſtiones ex hac regula facile ſolvuntur, quæ non eſt, niſi regula proportionum ſæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum eſt, intelligi eodem modo debet de damno, ſi ſocietati improſpere ceſſerit, ac damnum in ſingulos ſit dividendum, habita ratione pecuniarum, & temporis.

PROPOSITIO VI.

De Regula Alligationis.

CUM variæ res diverſi pretii inter ſe alligantur, ſeu miſcentur, ut varii liquores, merces, metalla, &c. atque inde pretium partibus mixti reſpondens inquiritur: ſeu, cum pretio quo-

dam medio propofito, quæritur, quantum ex fingulis mercibus, aut liquoribus mifceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi poffint; in utroque cafu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla fatis fuperque innotefcet.

I. Conflanda eft ftatua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera pofuit, alterum quod in fingulas libras ftat fcutis 30, alterum vero fcutis 25. Ex priore pofuit libras 120, ex pofteriore libras 180. Quæritur quot fcutis ftabat in fingulas ejufmodi ftatua?

Duc libras 120 X 30 fit 3600
180 X 25 4500

8100

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300., quotus 27 indicat unius libræ pretium. Nam fi lib. 300, valent fcut. 8100, quid lib. 1.? Ex regula aurea habentur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, menfura 1 primi generis ftat juliis 24, fecundi generis menfura 1 valet juliis 35. Si quis non habeat nifi julios 33, & menfuram unam ex utroque vino mixtam petat, quæritur ex utroque quantum debeat accipere.

1. Pone unum pretium ftatutum fub altero 24 & 35, & ad finiftram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia ftatuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, fed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 [hoc eft 9] ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur

tur juxta pretium minus 24, ut in sequenti exemplo factum vides.

2. Colligantur differentiæ in unam summam, ut hic 11, & instituatur regula trium toties, quot sunt differentiæ, nempe bis in hoc exemplo; ita ut summa differentiarum 11 occupet primum locum, mensuram vero 1 secundum locum, & una ex differentiis tertium. Tum dic, si 21 dat 1, quid 2; Rursus, si 11 dat 1, quid 9? Invenies ex potiori vino accipiendas esse $\frac{9}{11}$ unius mensuræ, ex altero vero $\frac{2}{11}$, quæ simul sumptæ faciunt $\frac{11}{11}$, hoc est mensuram unam quæsitam.

Pretia Differ.

33(24(2(	Si 11 dat 1, quid 2?	$\frac{2}{11}$
(((	quid 9?	$\frac{9}{11}$
(35(9(		
Summa 11		$\frac{11}{11}$

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia statuta proponuntur, ita tamen ut saltem unum sit majus, alterum vero minus pretio arbitrario; tunc plures fieri debent alligationes, quod exemplo satis vulgari explicatur.

Libra 1 Caryophilli valet juliis 3. Piperis libra, juliis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gratia sint *A*, *B*, *C*, *D*. Pretium vero medium sit *M*. Quæritur, quantum quis debeat ex singulis accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo disponantur ordinatim pretia, ut in exemplo sequenti. Secundo alligentur inter se duo pretia *A* & *D*; hoc est comparentur ambo cum pretio *M*, ut inveniantur differentiæ excessus, & defectus,

 nem-

nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta *A* & *D* modo superius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia *B* & *D* [idem pretium alligari potest pluries], differentiæ excessus est 2, defectus autem est 3, quæ ponantur alternatim juxta *B* & *D*. Similiter alligentur *C*, & rursus *D*, differentiæ sunt 2 & 1, quæ pariter statuantur alternatim juxta *C* & *D*.

3. Colligantur omnes illæ differentiæ in unam summam, quæ hic est 14. Deinde dic, si 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit $\frac{3}{14}$, seu $\frac{1}{7}$ quod toties iteretur, quot sunt pretia data *A*, *B*, *C*, *D*, adeo ut tres differentiæ 4, 3, 1, quæ appositæ sunt ipsi *D*, addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

		Pretia	Differ.
M 7	(	*A* 3 (	2.
	(	*B* 4 (	2.
	(	*C* 6 (	2.
	(	*D* 9 (	4. 3. 1.
		Summa	14

Si 14 dat lib. 1. quid 2? $\frac{3}{14}$

2? $\frac{2}{14}$

2? $\frac{2}{34}$

8? $\frac{8}{14}$

Summa $\frac{34}{14} = 1$.

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo $\frac{34}{14} = 1$.

De-

Demonstr. Summa differentiarum, quibus pretia statuta differunt per excessum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem, quam habent singulæ differentiæ seorsim sumptæ ad singulas partes mixti seorsim sumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot sunt differentiæ: quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compensari queat per excessum alterius pretii. Quod &c.

Corol. I. Ex superiori exemplo manifestum est, unumquodque pretium saltem semel alligari debere; idemque pretium posse pluries assumi, ut factum est cum pretio *D*.

Corol. II. Alligationes hujusmodi fieri possunt variis modis, siquidem pretium medium semper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diversa autem alligatione, diversa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto posita, ut patet.

PROPOSITIO VII.

De regula simplicis Positionis, seu falsi.

EA regula *falsi* dicitur, quæ ex positione numeri plerumque falsi docet verum numerum invenire, qui quæstioni satisfaciat. Dicitur *simplicis Positionis*, si simplex ponatur numerus, ut in hac Propos. fiet; duplicis vero, si duo numeri assumantur, ut in *Propos. seq.*

Regula simplicis Positionis in tribus consistit, nempe.

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad solvendam quæstionem, qui dicitur *Positio*.

 2. Exa-

2. Examinatur ille numerus, an talis ſit, qualis exquiritur.

3. Inſtituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius teſtamento mandavit, aureos centum diſtribui in tres fratris ſui filios, *A*, *B*, *C* hac lege, ut *A* habeat partem duplam *B*, & *B* partem triplam ipſius *C*. Quæritur quantum ſinguli debeant accipere.

Pone *A* habere aureos 6, habebit *B* aureos 3, *C* vero 1. Examina, an tres 6, 3, 1 ſimul efficiant 100 (nam ſi 100 efficerent, problema eſſet abſolutum) ſed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falſa poſitione provenit, ut hic 10: ſecundo loco ſtatuitur numerus primo aſſumptus, ſeu Poſitio, ut hic 6; tertio loco numerus datus in quæſtione, hoc eſt 100, invenies 60. Itaque *A* habebit 60 aureos, *B* 30, *C*, vero 10, quorum ſumma eſt 100, ſcilicet.

$$10 . 6 :: 100 . 60.$$

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, reſpondit, aureorum meorum $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ faciunt ſummam 470. Quæritur ea ſumma? Patet hic quæri numerum, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ſimul ſumptæ efficiunt 470. Ad evitandas fractiones aſſume numerum, qui contineat partes in quæſtione expreſſas. Eſto hic 60, cujus $\frac{1}{3} = 20$, $\frac{1}{4} = 15$, $\frac{1}{5}$, 12, quæ partes additæ faciunt 47. Debebat autem efficere 470. Inſtitue regulam proportionum, diſpoſitis terminis modo ſuperius explicato, nimirum.

47.

47 . 60 :: 470 . 600 .

Habebat ergo Cajus aureos 600, quorum $\frac{1}{3} = 200$, $\frac{1}{4} = 150$, $\frac{1}{5} = 120$, quæ partes simul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima singulis horis molit tritici modios 7, secunda 6, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici modii 360, omnibus illis molis simul adhibitis.

Pone requiri horas 5; hoc tempore prima mola conficit modios 35, secunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes sunt modii 100, debebant autem esse 360. Instituatur ergo regula proportionis: si modii 100 poscunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

100 . 5 :: 360 . 18 .

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, secunda 108, tertia 72, quarta 54, qui simul additi efficiunt modios 360.

Demonstr. Ut se habet (in primo exemplo 10 ad 6 + 3 + 1 simul sumptos in falsa positione, ita se habet in vera positione 100 ad 60 + 30 + 10 simul sumptos. Proinde regula stat in hoc ut numerus falsus 10, productus per numerum falsum 6, ita se habeat per regulam auream ad ipsum numerum falsum 6, sicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

PROPOSITIO VIII.

De Regula duplicis Positionis.

Regula *duplicis Positionis* non unum, sed duos supponit numeros, ut in *Propos. Præc.* dictum est, solvitque plures quæstiones, quæ per unam positionem resolvi nequeunt. Omnes tamen quæstiones, quæ per unam positionem solvuntur, etiam per duas solvi possunt. Quando autem duplici positione opus sit, indicabitur inferius in *Schol.* En regulæ ordo.

1. Pone pro numero quæsito quemcumque numerum, qui dicitur *Positio*, & cum eo procede juxta tenorem quæstionis; cui si non satisfaciat, errorem (hoc est excessum, vel defectum, quo positio aberrat a numero quæsito) subscribe eidem positioni, cum signo +, vel —, quorum unum plus, sive excessum, alterum minus, seu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priore major, vel minor, cum quo similiter examinetur quæstio proposita, cui si non satisfaciat, errorem pariter ei positioni subscribe cum signis +, vel —. Cum ambo errores sunt per excessum, vel ambo per defectum, dicuntur *similes*. Cum autem unus est per excessum, alter per defectum, hoc est cum signis diversis + & —, dicuntur errores *dissimiles*.

3. Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem positionis secundæ, & vicissim positio secunda in errorem primæ positionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæsitus.

4. Si

4. Si errores sunt dissimiles, productorum summa dividitur per summam errorum, quotus dat quæsitum.

I. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrati sunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*; *C* tantumdem quantum *B*, & insuper 10, quæritur lucrum singulorum.

Pone lucrum *A* fuisse 4, lucrum *B* erit 9, *C* vero 19. Adde simul 4, 9, 19, fiunt 32, at debebant esse 47; est ergo error, seu defectus in 15.

Rursus pone lucrum *A* fuisse 7, erit lucrum *B* 12, *C* vero 22, qui simul faciunt 41, quæ summa deficit a vera 47 per defectum *6*.

Cum itaque duo errores similes sint [nempe ambo per defectum] duc positionem 4. in errorem secundæ positionis, hoc est in *6*, & positionem 7 in errorem 15; fiunt duo producta 24 & 105, quorum differentia est 81, quem divide per differentiam unius erroris ab alio, idest per *9*, [subtrahendo errorem *6* ex alio errore 15] quotus *9* dat numerum quæsitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum *9*, *B* vero 14, & *C* 24, quorum summa est 47.

Posit. 4, *Err.* — 15
Posit. 7, *Err.* — *6*) *9* *diff.*

Prod. 4 X *6* = 24
7 X 15 = 105

Differ. 81

II. Si utraque positio sit excedens, praxis est omnino eadem. Ponamus enim lucrum *A* fuisse 12, erit lucrum *B* 17, & lucrum *C* 27, quorum sum-

ſumma eſt 56, excedens numerum datum 47 per errorem 9.

Pone iterum 11 pro lucro *A*, erit lucrum *B* 16, & lucrum *C* 26, quorum ſumma 53 adhuc peccat per exceſſum 6. Cum igitur errores ſimiles ſint [nempe per exceſſum] duc poſitionem 12 in errorem 6 alterius poſitionis & poſitionem 11 in errorem 9. Tum ſubtrahe productum minus 72 ex majori producto 99, & reſiduum 27 divide per differentiam errorum 9 & 6, hoc eſt per 3, quotus 9 dat numerum quæſitum, ut prius.

Poſit.	12,	*Err.* + 9	)	3. *diff.*
Poſit.	11,	*Err.* + 6	)	
Prod.	6 × 12 = 72			
	9 × 11 = 99			
	Differ. 27			

III. Quod ſi una poſitio ſit excedens, altera deficiens, ſumma productorum dividitur per ſummam errorum, ut dictum eſt ſupra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum *A* fuiſſe 5, lucrum *B* erit 10, & lucrum *C* 20, quorum ſumma 35 deficit a ſumma data 47 per defectum 12; ſumendus eſt igitur numerus major.

Pone lucrum *A* 11, *B* vero 16, & *C* 26, ſumma omnium 53 excedit veram ſummam 47 in 6. Ducatur jam poſitio 11 in errorem 6, & viciſſim poſitio 11 in errorem 12. Deinde quia errores ſunt diſſimiles, addantur duo producta 30 & 132, eorumque ſumma 162 dividatur per ſummam errorum 18, quotus 9 dat rurſus numerum quæſitum, ut antea.

Poſit.

Posit. 5, *Err.* — 22) 18 *summa*
Posit. 11, *Err.* + 6)
Prod. 5 X 6 = 30
11 X 12 = 132

Summa 162

Sit aliud exemplum. Interrogatus Pythagoras de numero suorum discipulorum, respondit, eorum dimidium dare operam Geometriæ, quartam partem Philosophiæ, septimam partem servare silentium; insuper tres alios se habere instituendos. Quæritur eorum discipulorum numerus.

Ponatur discipulos habuisse 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, septima pars 8, quorum summa est 50; his addantur illi 3, fiunt 53, deberent esse 56; est ergo error per defectum 3, quem nota juxta ipsam positionem 56.

Rursus ponatur discipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, septima 16, quæ simul efficiunt 100, additisque 3, fiunt discipuli 103. Est ergo iterum error per defectum 9, quem nota ad positionem 112.

Jam duc positionem primam 56 in errorem secundæ positionis, hoc est in 9, & vicissim positionem secundam 112 in alterius positionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores similes sint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam errorum 6; quotus 28 dat numerum quæsitum discipulorum. Nam ejus dimidium est 14, quarta pars 7, septima 4, quæ simul faciunt 25, additisque 3, habetur numerus 28.

Posit.

Posit. 56, *Err.* — 3) 6 *diff.*
Posit. 120, *Err.* — 9)
Prod. 56 $\times$ 9 = 504
112 $\times$ 3 = 336

Differ. 168

Postremo sunt tres numeri ignoti *a*, *b*, *c*, qui sumpti bini dant summam, ut sequitur.

$$a + a = 50$$
$$b + c = 70$$
$$c + c = 60$$

Quæritur singulorum valor, Pone $a = 16$, erit $b = 34$, ergo $c = 36$, proinde $a + c = 16 + 36$, hoc est 52. Sed esse debebat 60; ergo positio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque $a = 18$, erit $b = 32$, ergo $c = 38$, adeoque $a + c = 18 + 38$, hoc est — 56, sed debebat esse 60; est ergo rursus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut supra; reperietur $a = 20$, proinde $b = 30$; $c = 40$, unde $a + c = 20 + 40$, seu 60, quod quærebatur.

Schol. *Indicium autem quando quæstio proposita solvi non possit per unam positionem; sed duplicem omnino requirat, est; cum quæstioni aliquis determinatus numerus additus est; qui una cum numero ad libitum posito debet assumi: Sic in primo exemplo numeri illi determinati* 5, & 10, *qui adduntur numero ad libitum posito, indicio sunt duplici positione opus esse. In secundo autem exemplo numerus ille determinatus discipulorum* 3 *non importat dupli-*

cem

cem positionem, quia non afficit partes aliquotas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ *numeri quæsiti, unde quæstio illa etiam per simplicem positionem solvi potest. Quæritur enim numerus, ex quo si auferatur* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, *residuum sit* 3. *Ponatur idem numerus* 56, *qui prius; erit* 56 — $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{7}$ = 6, *quod residuum debebat esse* 3. *Dicatur ergo si residuum* 6 *provenit ex* 56, *unde* 3? *Prodibit quartus proportionalis* 38, *qui quæstionem solvit, ut antea.*

PROPOSITIO IX.

Aurificis furtum in corona Hieronis regis detegere.

VItruvius *lib.* 9. *cap.* 3. refert, ab Archimede deprehensam fuisse fraudem, qua artifex auream Hieronis regis coronam, admixta argenti portione, adulteraverat; sed quo præcise artificio id egerit, non satis constat. Duas tamen massas fecisse dicitur, alteram ex auro puro ejusdem ponderis cum corona, alteram ex argento item puro ponderis ejusdem: tum hæc tria in vas aqua plenum seorsim immittens, aquam inde effluentem sedulo exploravit, atque hinc quantum argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur coronæ pondus fuisse lib. 12, item auri, & argenti mixtas; & dum corona in vas aqua plenum demitteretur, effluxisse aquæ libras 7 $\frac{4}{5}$, dum autem immergeretur auri massa effluxisse aquæ libras 7 $\frac{1}{5}$, immersa demum argenti massa, effluxisse aquæ libras 10 $\frac{4}{5}$. Jam ex regula duplicis positionis ponatur, in ea corona fuisse auri lib. 9. erant ergo argenti lib. 3. Itaque per regulam proportionum dic, si puri auri lib. 12 dant aquæ libras 7 $\frac{1}{5}$, quid lib. 9? invenies lib. 5 $\frac{2}{5}$. Item, si puri argenti lib. 12. dant aquæ lib. 10 $\frac{4}{5}$, quid lib. 3? pro-

veniunt lib. $2\frac{7}{10}$. Adde ſimul libras $5\frac{2}{5}$, & $2\frac{7}{10}$, habentur aquæ lib. $8\frac{1}{10}$, debebant autem eſſe lib. $7.\frac{4}{5}$ eſt ergo error per exceſſum $\frac{3}{10}$, qui notetur cum ſigno + una cum poſitione aſſumpta 9.

Ponatur ſecundo in eadem corona fuiſſe auri lib. 8., ergo ex argento erant lib. IV. Dic igitur per regulam auream, ſi auri puri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 8? inveniuntur lib. $4\frac{4}{5}$. Similiter, ſi argenti puri lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$. quid. lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib. $3\frac{3}{5}$ Adde ſimul lib. $4\frac{4}{5}$, & $3\frac{3}{5}$, fit ſumma librarum aquæ $8\frac{2}{5}$, debebant autem eſſe lib. $7\frac{4}{5}$. Peccatum eſt igitur rurſus per exceſſum $\frac{3}{5}$, ſeu $\frac{6}{10}$, qui notetur cum + juxta poſitionem 8, ut ſequitur.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Poſit. } 9,\ \textit{Err.} + \frac{3}{10}\\ \textit{Poſit. } 8,\ \textit{Err.} + \frac{6}{10}\end{array}\right)\frac{3}{10}\ \textit{differ.}$$

$$\textit{Prod. } 9 \times \frac{6}{10} = \frac{54}{10}$$

$$8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10}$$

$$\textit{Differ.}\ \frac{30}{10} = 3$$

Ductis jam $9 \times \frac{6}{10}$, & $8 \times \frac{3}{10}$ habentur $\frac{54}{10}$, & $\frac{24}{10}$: quorum differentiam $\frac{30}{10}$, ſeu 3, divide per differen-

rentiam errorum, hoc est per $\frac{3}{10}$, quotus $\frac{30}{5}$, seu 10, dat auri libras quæsitas. Erant ergo immixtæ 2 argenti libræ.

Ut fiat examen dic, si auri lib. 12. dant aquæ lib. $7\frac{1}{5}$, quid lib. 10? invenies lib. 6. Item si argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{4}{5}$ quid lib. 2? invenies lib. $1\frac{4}{5}$. Adde igitur 6, & $1\frac{4}{5}$, summa librarum $7\frac{4}{5}$ dat tantum aquæ, quantum, dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. *Sed nota non opus fuisse Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujusmodi facere velit, conficere auri, vel argenti massas ejusdem ponderis cum corona: sed satis esse aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis assumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aquæ effluentis quantitatem proportio.*

Schol. II. *Per regulam duplicis positionis aliæ plures quæstiones pulcherrimæ solvi possunt, quæ tamen longe facilius, universali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propositionis hujus simplex, ac genuina demonstratio; ut videre est apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis ann.* 1704. *edit. Paris. pag.* 358. *Demonstrationes autem aliunde petitæ prolixæ sunt admodum, & implicatæ, quas proinde nos prætermittimus.*

PROPOSITIO X.

Datis duobus numeris, tertium proportionalem invenire.

DUC secundum in seipsum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quæsitus. Dati sint 2 & 8, quibus tertius proportionalis inquiritur. Ducatur 8×8, & productum 64 divi-

dividatur per 2, quotus 32 eſt numerus quæſitus. Sic 2, 8, 32, ſunt in eadem proportione ſubquadrupla. Ratio patet *ex* 1 *lem.*

Schol. *Si numeri dati ſint inter ſe primi hoc eſt, unus non ſit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, ſed fractus. Sic datis* 2 *&* 5 *invenitur* per hanc Prop. *tertius proportionalis* $\frac{25}{2}$, *hoc eſt* 12 $\frac{1}{2}$.

PROPOSITIO XI.

Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.

Medius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita ſe habet ad alterum datum, ſicut alter datorum ad ipſum; ita ut numeri dati ſint extremi, & ipſe medius; qui bis ſumitur, ſemel ut conſequens reſpectu primi, & ſemel ut antecedens reſpectu alterius.

Dati ſint numeri 4 & 16, inter quos medius proportionalis quæritur. Duc illos inter ſe, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic $4 \times 16 = 64$, cujus radix quadrata eſt 8 per *Propoſ.* 2. *Cap.* 5. ſunt igitur 4, 8, 16 continue proportionales, num. 4. 8. : : 8. 16. Ratio patet *ex* 1. *lemm.*

Schol. I. *Si productum ex numeris datis non ſit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non poſſit ſine reſiduo; tunc medius proportionalis inveniri nullo modo poteſt. Nam dati numeri ſint v. g.* 2 *&* 5, *radix quadrata per* Prop. cit. & Schol. 2. *erit* 3 $\frac{1}{6}$. *Adeoque erunt in continua proportione* 2, 3 $\frac{1}{6}$, 5, *quod eſt falſum, nam ſi reducuntur ad idem nomen, erunt* $\frac{12}{6}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{30}{6}$, *ſeu* 12, 19, 30, *qui nullo modo ſunt proportionales, ut patet.*

Schol. II. *Cum omne quadratum intelligi poſſit multiplicatum eſſe per unitatem, hic omnis radix qua-*

quadrata erit media proportionalis inter unitatem, & ipsum quadratum. Sic 25, *radix quadrata numeri* 625, *est media proportionalis inter* 1 & 625, *proinde* 1, 25, 626 *sunt in eadem ratione continua. Nam* 1. 25 :: 25. 625.

PROPOSITIO XII.

Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.

Quadratum unius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto extrahatur radix cubica per *Propos.* 3. *Cap.* 5., quæ erit duorum mediorum proportionalium prior. Deinde quadratum alterius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto pariter extrahatur radix cubica, quæ erit duorum mediorum proportionalium posterior.

Dati sunt numeri 2 & 16, quos inter invenire oporteat duos medios proportionales. Quadra minorem numerum 2, ejusque quadratum 4 duc in 16, fiunt 64, cujus radix cubica 4 erit prior duorum proportionalium. Similiter quadratum alterius numeri 16, nempe 256, duc in 2, fiunt 512, cujus radix cubica 8 erit duorum proportionalium posterior, proinde 2, 4, 8, 16 sunt in continua proportione, ut patet, cum sit 2 ad 4, ut 4, ad 8, ut 8, ad 16.

Schol. *Si ad numerum datum, & primum medium proportionalem inventum, quæratur tertius proportionalis* per Propos. 10. hujus; *vel si inter medium proportionalem inventum, & alterum numerum datum inveniatur medius proportionalis* per Propos. 11. hujus; *in utroque casu obtinebitur secundus*

 duo-

duorum mediorum proportionalium quæsitus. Ceterum si numeri dati sint tales, ut inde radix cubica obtineri non possit sine fractionibus, tunc medii proportionales inveniri nequeunt, ut de uno medio proportionali dictum est in Schol. 1. Propos. præc.

PROPOSITIO XIII.

Quæstiones aliquot practicæ expediuntur.

ETsi quæstiones fere omnes, quæ sequuntur, ex regulis proportionum jam explicatis facile resolvi possint; quia tamen eas ordinare, atque expedire tyronibus negotium facessit, adeoque Arithmetici practici peculiares de his tractatus instituerunt, proinde nos præcipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipsa praxi operandi etiam methodus innotescat.

1. Marcellus debet Titio scuta Romana 3432. Cedit illi domum, quæ locari solet annuis scutis 53 $\frac{2}{3}$, possidendam, donec debitum sit omnino solutum, quæritur quot annis eam Titius possidebit.

Dividantur sc. 3432. per sc. 53 $\frac{2}{3}$ (redactis integris cum fractione ad fractionem ejusdem nominis) invenientur anni 63, menses 11, dies 12, quod per se manifestum est.

2. Impendit Paulus scuta Romana 415. 35. in libras 385. mercis cujusdam coemendas, unde lucrari cupit scuta 50. 50, quæritur quanto singulas libras vendere debeat.

Addantur simul emptæ mercis pretium, & lucrum inde faciendum, nempe 415. 35 + 50. 50 = 465. 85, quæ quidem summa dividatur per nu-

numerum librarum 385, quotus dat unius libræ pretium. Scilicet sc. 1 : 21.

3. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis 8400; quærit quantum ex singulis 100 lucratus sit?

Dic per regulam proportionum, si 8400 fiunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex singulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel sic, subtrahe 8400 ex 9072, differentia, seu lucrum est aureorum 672. Dic ergo, sic 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea.

Examen fit si dicas, 100 fiunt 108, quid 8400? invenies 9072.

4. Fingamus ab eodem Lucilio solvendam esse pensionem scutorum 500 annis quinque, hoc est scuta 100 singulis annis; quam ille emit parata pecunia, solutis statim scutis 400. Quæritur, quantum lucri ex singulis 100 percipiat.

Dic per regulam auream; si scuta 400 fiunt 500, seu per *Prop.* 4. *hujus*, si 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex singulis 100 habet lucrum scutorum 25.

Examen erit, si dicas 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

Schol. I. *Quæstiones hujus generis pertinent ad regulas lucri, seu* simplicis meriti, *ut vocant*.

5. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus solvendos, hoc est singulis annis aureos 200. Paratus tamen est statim aureos 660 creditori solvere, siquidem 10 ex singulis 100 sibi relaxet. Quæritur, quot aureos solvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 100 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot scilicet anni sunt (dic si 110 fiunt 100; vel (*per Prop.* 4. *hujus*) si 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rursus dic, si 11 fiunt 10, quid 200? invenies 181 $\frac{9}{11}$.

mum, si 11 dant 10, quid $181\frac{9}{11}$? proveniunt $165\frac{35}{121}$. Addantur simul 200, $181\frac{9}{11}$, $165\frac{35}{121}$ erit summma $547\frac{13}{121}$. Accipiet ergo Sempronius tantum aureos $547\frac{13}{121}$.

Schol. II. *Nota in hac aliisque hujus generis quæstionibus dici non posse, si 100 fiunt 90, quid 220? Sed necessario addi debere lucrum ipsum 10 ad 100. Nam nihil aliud proponitur relaxandum, nisi lucrum; proinde lucrum ipsum additur ad sortem, seu 100, ut habeatur 110, primus regulæ aureæ terminus.*

6. Eadem ratione si quis ad tres annos domum conduxerit cum annua pensione scutorum 300, domino autem ejus domus omnem statim summam in anteceffum solvat ea conditione, ut sibi scuta 5 pro singulis 100 compenset: dices, si 105 fiunt 100, seu (dividendo 105, & 100 per 5) si 21 fiunt 20, quid 300? invenies $285\frac{5}{7}$. Rursus, si 21 fiunt 20, quid $285\frac{5}{7}$? fiunt $272\frac{16}{147}$. Demum si 21 dant 20, quid $272\frac{16}{147}$? proveniunt $259\frac{467}{3087}$. Horum summa $816\frac{97}{100}$ (redactis fractionibus in partes centesimas) in anteceffum domus illius domino solvenda est.

Quod si aurei illi 660 a Fabio triennio post solvendi sint; tunc additis, ut supra 10 ad 100, dic si 110 fiunt 100, seu, *per Propos. 4. hujus*, si 11 fiunt 10, quid 660? erunt 600. Rursus, si 11 fiunt 10, quid 600? invenies $545\frac{5}{11}$. Demum, si 11 fiunt 10, quid $545\frac{5}{11}$. Fiunt $495\frac{105}{121}$; & hi solum Sempronio solvendi sunt.

Vel

Vel brevius, duc 660 X 10 X 10 X 10 = 1000, & productum 660000, divide per 11 X 11 X 11 = 1331, quotus dat 495 $\frac{105}{121}$, ut antea.

Schol. III. *Hæc praxis vulgo dicitur*, scontare a capo d'anno.

7. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fœnore auctio sortis. Nihil fuit a Cajo solutum toto triennio. Quæritur, quantum ipse pro sorte, atque usuræ usura fœneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110; deinde per regulam auream dic, si aurei 100 fiunt 110, seu si 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc est 500 pro sorte, pro usura vero primi anni 50. Rursus pro secundo anno dic, sic 10 fiunt 11, quid 550? fiunt 605. Demum si 10 dant 11, quid 605? Invenies summam a Cajo solvendam, aureos 665$\frac{1}{2}$

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc est in 11 X 11 X 11 = 1331, & productum 665500, divide per 1000, nimirum per 10 X 10 X 10 = 1000, quotus dat 665 $\frac{1}{2}$, ut antea.

Coroll. Hinc liquet, sortem datam, nempe aureos 500, & summas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, & 665 $\frac{1}{2}$ esse terminos continue proportionales, cum omnes sint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11, proinde inter sortem datam, & ultimi termini summam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus fœnoris fuerunt anni uno minus. Hoc ipsum de præcedenti quæstione debet intelligi.

Schol. IV. *Praxis huiusmodi, quæ apud Latinos anatocismus, sive usura usuræ, & a nonnullis usura Judaica dicitur, est a lege vetita. Ab Italis vocari* so-

solet meritum meriti, *seu* meritare a capo d' anno. *Hac vero regula utimur*, *ubi fundus ex annuis fructibus continuo augeri*, *ac multiplicari debet*.

8. Terentius debet Gelio pro usura primi anni summam sortis & fœnoris simul scuta 4608, pro quarto autem anno scuta 6561; quæritur, quanta fuerit sors, quantumque fœnus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, per *Propos.* 12. *hujus*; duc scilicet minorem 4608 in se, fit quadratum 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504. Hinc autem extrahatur radix cubica, per *Propos.* 3, *Cap.* 5: prodibit 5184; quæ erit duarum proportionalium minor, per *Prop.* 12. *cit.* Solvet igitur secundo anno pro sorte, ac fœnore scuta 5184: atque hinc deducitur sortis quæsitæ quantitas. Nam ex *præc. Coroll.* sortis summa, & reliquæ omnes, sunt inter se in proportione continua; proinde secundi anni summa 5184 se habet ad summam 4608 primi anni, sicuti hæc ad sortem quæsitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quæratur tertius proportionalis per *Propos.* 10. *hujus*, erit sors quæsita 4096. Hanc vero subtrahe ex summa data sortis & fœnoris primi anni, nempe ex 4608, innotescet ejusdem sortis usura, scutorum scilicet 512, seu 12 $\frac{1}{2}$ ex singulis 100. Nam dic, si scuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies 112 $\frac{1}{2}$, hoc est 12 $\frac{1}{2}$ ex singulis centenis.

CA-

CAPUT VIII.

De progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

PRogressio est complurium terminorum eadem ratione procedentium series. Si excessus, vel defectus, quo termini illi procedunt, sit æqualis, ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. qui binario crescunt, vel 15, 12, 9, 6, 3, &c. qui ternario decrescunt, tunc oritur *progressio Arithmetica*. Si vero termini sint in continua ratione Geometrica proportionales eo modo, quo in præcedenti capite explicatum est, tunc habetur *progressio Geometrica*. De utraque hic breviter agemus.

Datur etiam proportio Harmonica, seu Musica, in qua tres termini ita ordinantur, ut eadem sit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi. Tales sunt numeri 3, 4, 6. Nam inter 6 & 3 est proportio dupla, sicuti dupla est proportio differentiæ inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1, scilicet 6. 3 :: 6 — 4. 4 — 3.

Regulæ progressionum hujusmodi consistunt in hoc, ut eorum terminorum series compendiose, & sine prolixæ calculationis tædio in unam summam colligantur.

LEMMATA.

I. IN progressione Arithmetica terminorum quorumcumque, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum terminorum, qui ab extremis æqualiter distant. Sint.

 1, 3,

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Erit $1 + 11 = 3 + 9$. Item $1 + 11 = 5 + 7$.

II. In progressione Arithmetica terminorum imparium summa extremorum, vel duorum terminorum æqualiter distantium, dupla est termini medii.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.$$

In hac progressione septem terminorum summa $1 + 13 = 7 + 7$, seu 14. Item $3 + 11 = 14$, pariter $5 + 9, = 14$.

III. In omni progressione Arithmetica quilibet terminus continet primum, hoc est minimum terminum, & toties excessum, seu differentiam una minus, quot sunt termini post primum usque ad ipsum inclusive. Sint

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Terminus quartus progressionis 7 continet, ut patet, minimum terminum 1, & ter differentiam 2. Pariter 9, terminus quintus progressionis, continet 1, & quater differentiam ipsam 2. Ita quoque 11, terminus progressionis sextus, continet 1, & quinquies differentiam 2, ut patet.

Coroll. Hinc habetur maximus progressionis terminus, si differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præcedenti progressione, si differentia 2 ducatur in 5 (numerum terminorum unitate minutum) & producto addatur minimus terminus 1, habetur maximus terminus 11.

PRO-

PROPOSITIO I.

Datis minimo ac maximo progressionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire summam.

Regula hæc est: summa minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit summam totius progressionis.

Sit exemplum. Quæritur summa omnium campanæ pulsuum alicujus horologii, quod ab 1 hora usque ad 12 inclusive, det pulsus pro horis juxta naturalem numerorum seriem 1, 2, 3, 4, 5, &c. ita ut pro hora 7 septies, pro hora 10 decies, pro 12 duodecies pulset. Minimus terminus est 1, & maximus 12; horum summa 13 ducatur in 6, (dimidium terminorum) productum 78 dat omnes campanæ horariæ pulsus pro horis 12. Cujus duplum dat pulsus horarios integri unius diei.

Ratio deducitur ex *Lemm.* 1. Nam cum summa extremorum æqualis sit duobus quibusque terminis æqualiter distantibus, rectangulum factum ex summa primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, necessario æquale erit summæ totius progressionis. Multiplicatio enim est idem ac compendiosa additio ex dictis *Propos.* 5. *Cap.* 1.

Coroll. Hinc infertur, summam progressionis Arithmeticæ pariter haberi. 1. Si dimidium summæ maximi ac minimi termini ducatur in numerum terminorum. 2. Si summa maximi & minimi ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur. 3. Quia vero in progressione terminorum imparium numerus medius æquatur dimidio summæ maximi ac minimi ex *Lem.* 2. hinc sequitur,

ha-

haberi progressionis summam si numerus medius ducatur in numerum terminorum imparium.

PROPOSITIO II.

Datis terminis maximo, & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per numerum terminorum unitate minutum, quotus dabit differentiam quæsitam.

In præcedenti exemplo campanæ horariæ a maximo termino 12 aufer minimum 1, & residuum 11 divide per numerum terminorum unitate minutum, nempe 11; quotus 1 dat differentiam quæsitam.

Ratio desumitur ex *Lem.* 3. Nam 12 continet minimum terminum 1, & præterea toties continet differentiam, quot sunt post terminum 1 usque ad ipsum inclusive 12 termini, qui nimirum sunt 11: proinde, ablato minimo termino, residuum continet toties differentiam, quot sunt progressionis termini minus uno; adeoque diviso residuo per numerum terminorum unitate minutum habetur differentia.

PRO-

PROPOSITIO III.

Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.

DUC differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & producto adde minimum terminum, summa dabit maximum.

Sit exemplum. Dux exercitus distribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40 strenuos milites, qui primi arcem occuparunt; hoc pacto, ut ultimo, qui mœnia superavit, dentur aurei 100, penultimo 130, ante penultimo 160, & sic deinceps: quæritur, quantum retulerit pecuniæ primus. Patet minimum terminum esse 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & producto 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium scilicet primi militis. Ratio patet *ex Lem.* 3, *ejusque Coroll.*

PROPOSITIO IV.

Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.

A Maximo aufer minimum, & residuum divide per differentiam, quotus unitate auctus dat numerum terminorum.

Sit exemplum. Empta est multitudo librorum hac conventione, ut minimus liber stet juliis 2, secundus juliis 4, tertius 6 &c., ultimi vero libri pretium fuit juliorum 400, quæritur librorum nu-

numerus. Aufer minimum 2 a maximo 400, & residuum 398 divide per differentiam 2, quotus 199 unitate auctus, hoc est 200, est numerus terminorum, seu librorum, qui quæritur.

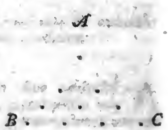
Similiter artifex de opere perficiendo convenit hoc pacto, ut primo die solvantur sibi asses 20, secundo dies asses 25, tertio asses 36, & sic deinceps. Ultimo die, quo opus absolvit, accepit asses 165, quæritur quot dies operi insumpserit. Aufer terminum minimum 20 a maximo 165, & residuum 145 divide per differentiam 5, quotus est 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propositionis desumitur *ex Lemm.3.*, ut manifestum est.

PROPOSITIO V.

De Numeris Polygonis.

Numeri Polygoni sunt summæ progressionum Arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in species Triangulares, si differentia progressionis sit 1: Quadrati, si differentia sit 2: Pentagoni, si 3: Hexagoni, si 4: Heptagoni, si 5 &c. sortiuntur autem hæc nomina a figuris Geometricis, in quas disponi possunt per puncta unitatibus respondentia, ut ex Triangulari *A B C* patet.



Progr. Arith.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Num. Triangulares.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28,
Progr. Arith.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.

Num.

Num. Quadrati.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.
Progr. Arithm.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.
Num. Pentagoni.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.
Progr. Arithm.	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.
Num. Hexagoni.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.

Latus Polygoni est numerus terminorum progressionis Arithmeticæ, qui summantur, quod quidem tot continet unitates, quot numerus ipse polygonus terminos. Sic latus BC polygoni triangularis ABC continet unitates 4, & polygonus numerus 10 summam quatuor terminorum $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Numerus angulorum est, qui indicat quot angulos, seu latera habeat talis in specie polygonus, ex quorum numero determinantur. Sic numerus angulorum in Triangularibus est 3, in Tetragonis 4, in Pentagonis 5, &c. Numerus vero angulorum superat semper duplici unitate differentiam progressionis generatricis, quod notetur. Ex his facile est solvere problemata, quæ sequuntur.

1. Dato latere, & numero angulorum numerum polygonum invenire. Nam esto datum latus 4, & angulorum numerus 3. Jam patet, addendos esse quatuor terminos, cum latus datum unitates quatuor contineat progressionis Arithmeticæ, cujus differentia est 1, Nam angulorum numerus $3 - 2$, dat differentiam 1. Erunt ergo termini addendi $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, qui erit numerus triangularis quæsitus; sit exemplum, disponere volo in viridario aliquot flores, sive arbores, in forma triangulari, ita ut in latere sint arbores 4, quæritur eorum numerus, patet 10. requiri.

2. Dato numero polygono, & angulorum numero, polygoni latus invenire. Sit polygonus datus

tus 51, & angulorum numerus 5. Ex dictis constat differentiam seriei generatricis esse 3, adeoque polygonum datum 51 esse Pentagonum, cui in prima serie numerorum naturalium respondet latus 6. Quod manifestum est, si ejusdem seriei, cujus differentia est 3, termini 6. summentur.

Schol. *Si addantur simul numeri polygoni, nempe triangulares, aut Quadrati, aut Pentagoni &c. summa dat numeros Pyramidales, qui si oriantur ex additione Triangularium, vocantur Pyramidales Triangulares. Si ex additione quadratorum, Pyramidales Quadrati. Sic si addas simul Hexagonos* 1. 6, 15, 28, 45, 66, *&c. invenies numeros Pyramidales Hexagonos* 1. 7, 22, 50, 95, 161 *& sic de aliis.*

De Progressionibus Geometricis.

L E M M A IV.

In omni progressione Geometrica si terminus quilibet in se ducatur, & productum dividatur per terminum primum progressionis, quotus distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse terminus.

In progressione *A* terminus 8 tertio loco positus qui duobus locis distat a primo, ducatur in se, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 distabit a primo termino locis duplo pluribus, seu quatuor. Nam terminus 32 est tertius proportionalis ad duos terminos 2, & 8, per *Propos.* 10. *Cap.* 6. proinde 32 toties continet 8 (hoc est bis terminum intermedium 16) quoties 8 continet primum 2, nempe

A 2,

A 2, 4, 8, 16, 32, &c.
0. 1. 2. 3. 4.

bis terminum intermedium 4; adeoque cum 32 tantumdem distet ab ipso 8, quantum 8 a termino primo 2 (duobus scilicet locis) distabit ipse 32 a primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

Coroll. Hinc sequitur, quod si cuilibet progressioni Geometricæ subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio a cyphra, quilibet progressionis terminus, qui producitur per alium in se ductum, & divisum a primo, habeat sub se notam duplo majorem, quam terminus a quo producitur. Sic in superiori exemplo terminus 32 habet sub se notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes*, *vel indices* progressionis dicuntur, indicant, quantum quisque terminus distet a primo. Locum autem, seu numerum terminorum progressionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index est 4, est quintus in progressione terminus. Quod notetur.

LEMMA V.

IN omni progressione Geometrica si duo quilibet termini in se ducantur, & productum dividatur per primum terminum progressionis, quotus dabit terminum tot locis distantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum simul additi.

In Progressione Geometrica *B* subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum est in *præc.*

præc. Coroll. & duo quilibet termini 10 & 40, quorum indices simul additi dant 4, ducantur inter se, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus, est 80, cujus index pariter est 4, adeoque quatuor locis distat a primo termino per *Coroll. cit.*

B 5, 10, 20, 40, 80, 160 *&c.*
0. 1. 2. 3. 4. 5.

Coroll. Hinc ad inveniendum quemlibet progressionis datæ terminum, v. g. sextum, multiplicari debent inter se duo termini, eorumque productum divide per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quæsitus. Sic ad inveniendum sextum progressionis *B* terminum, ductis inter se 20 & 40 (quorum indices additi dant 5) & producto diviso per 5, quotus 160 erit sextus progressionis terminus, ut patet.

PROPOSITIO VI.

Datis minimo & maximo progressionis Geometricæ terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire.

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum summam.

Sit exemplum. Venditur æquus eximiæ pulchritudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in soleis ferreis figendis adhiberi solent, solvatur

vatur pro primo clavo 1 assis, pro secundo clavo 2 asses, pro tertio 4, & sic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat asses 2147483648. Quæritur assium omnium solvendorum summa.

Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & residuum divide per denominatorem 2 unitate multatum nempe per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac residuum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progressionis summa 4294967295: qui asses si dividantur per 100, erit pretium illius equi scutorum 42949672, & asses 95, *per Schol. Prop. 5. Cap. 3.*

Ratio deducitur *ex Prop. 34. lib. 9. Eucl.* Nam in omni finita progressione Geometrica, ut denominator unitate multatus est ad unitatem, ita maximi & minimi differentia (seu maximus terminus, dempto minimo) est ad totam progressionis summam, minus ipsomet maximo termino; ut si fuerit progressio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81, 243, erit denominator 3 unitate multatus seu 2 ad 1, sicuti 243 — 3, seu 240, ad totam progressionis summam, dempto maximo termino, hoc est ad $3 + 9 + 27 + 81 = 120$; proinde diviso 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progressionis summa 363.

Schol. I. *Progressionis duplæ ab unitate incipientis brevius habetur summa, si duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum 2147487648, ac deme unitatem, residuum dabit summam totius progressionis 4294967295, ut antea. Ratio per se manifesta est, quia denominator unitate multatus est unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc casu idem est, ut illum bis sume-*

re, seu duplicare.

Schol. II. *Ex progressione dupla ab* 1 *incipiente* 1, 2, 4, 8, 16 *&c. habentur numeri, qui dicuntur* Perfecti, *qui scilicet omnibus suis partibus aliquoties æquales sunt, ut* 6, 28, 496 *&c. hoc pacto: adduntur ordinatim progressionis duplæ termini, donec eorum summa sit numerus primus, ut* $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$. *Tum numerus primus* 3, *vel* 7, *vel* 31 *ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic* $3 \times 2 = 6$, $7 \times 4 = 28$, $31 \times 16 = 496$. *Et sic de aliis, qui pauci sunt, sicuti in natura alia res, quæ perfectæ dicuntur. Nam intra decem est* 6, *intra centum est* 28, *intra mille est* 496, *intra dena millia* 8128. *Omnes aut senario aut octonario terminantur.*

PROPOSITIO VII.

Datis aliquot progressionis Geometricæ terminis, quemcumque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.

Dati sint aliqui termini Geometricæ progressionis *A*, & inveniendus sit ejusdem terminus v. gr. vigesimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quæsiti *per Coroll. lemm.* 4. Subscribe terminis datis numeros naturales ab unitate, facto initio a cyphra, *per Cor. cit.*, & duc 80, qui in progressione quintum locum occupat, & distat a primo locis 4, in se ipsum, ejusque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 distabit a primo ter-

termino locis duplo pluribus, quam ipse 80, hoc est locis 8 *per lemm.* 4.

Eadem ratione duc 1280 in se ipsum, & productum divide per 5, quotus 327680, distabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc est 16 *per lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quæsiti 19 differat per defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index sit 4, hoc est per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigesimus quæsitus.

Nam cum ex constructione terminus 2621440 sit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices sunt 16 & 3, seu 19, & divisus sit per primum terminum 5, distabit tot locis a primo termino, quot unitatem habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 *per lemm.* 5., hoc est locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progressione vigesimus *per Coroll. lemm.* 4. Quod erat &c.

Coroll. Patet idem esse quærere datæ progressionis terminum 20, ac terminum exponentis, seu indicis 19, unitate minoris termino quæsito.

PROPOSITIO VIII.

Afferuntur nonnullæ Progressionis Geometricæ quæstiones.

1. QUæritur, quantum frumenti ex uno tritici grano haberi possit annis 10, si supponatur ab uno grano produci posse singulis annis grana 100, licet revera multo plura produci soleant.

Illa ergo 100 grana secundo anno producent centies centum grana, nempe 10, 000, & sic

deinceps in proportione centupla. Inveniatur hujus progressionis decimus, seu ultimus terminus, qui *per Propos. præc.* erit 10000, 0000, 0000, 0000, 0000, hoc est unitas cum cyphris 20. A quo si auferatur minimus terminus 100, messis primi anni, & residuum dividatur per denominatorem proportionis unitate minutum, hoc est per 99, & addatur quoto ultimus terminus supra inventus, erit omnium granorum summa *per Prop.* 5.

1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0.

Quam nec totius Europæ horrea caperent. Ponamus enim ad unam Romanæ libræ unciam requiri grana 600; ad libram unciarum 12 requiruntur grana 7200. Cum autem Romanum (ut vocant) Rubium sit pondo librarum 640, requiruntur ad Rubium unum grana 4608000; dividatur per hunc progressionis summa, dabit quotus rubiorum numerum.

2. Rex, cui ex annuo redditu proveniunt ter decies centena millia nummorum argenteorum, statuit ejusmodi redditus alicui ministro locare hoc pacto, ut singulis annis per unum mensem solvat sibi primo die assem 1, secundo die asses 2, tertio vero 4, in proportione dupla diebus 30, quæritur summa solvenda Regi.

Inveniatur progressionis duplæ ab 1 incipientis terminus 30 per *Propos. præc.* erit 536870912, qui duplicetur, & a duplo auferatur unitas; erit assium summa 1073741823, per *Schol.* 1. *Propos.* 6. Ex qua resectis ad dexteram duabus notis, habetur nummorum argenteorum summa.

3. Scheramus Indiæ Rex proposuit Sessæ Dahir Indo, qui latrunculorum ludum a se inventum illi

illi exposuerat, ut in prœmium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola positum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64 perventum fuisset. Levissima regi primum visa res est: sed facto computo ab Arithmeticis, inventum est, neque in ejus Regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551616. Hoc patet ex dictis per *Prop. 6. & 7. hujus*.

Schol. I. *Hanc doctrinam qui perceperit, haud mirabitur id, quod sacra historia narrat de multitudine filiorum Israel, qui egressi sunt de Ægypto. Cum enim eo profecti essent non plures, quam 70, ita multiplicati sunt, ut post annos 120, inde exierint ad sexies centena millia bellatorum hominum, præter pueros, senes ac mulieres.*

Schol. II. *Admirando Geometricæ progressionis duplæ ab 1 incipientis usque ad terminos 124 inclusive incrementa, quot scilicet scalarum gradibus Romæ ad templum Aracœlitanum ascenditur, prosecutus est integro libro Romæ edito an. 1652. Fr. Ludovicus Paris de Monte Fano Min. Observ., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut nescias, utrum magis Geometricæ progressionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.*

Schol. III. *De progressione Geometrica infinita per infinitos terminos descendente non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici studium transcendat, & per Analysin ea longe facilius explicentur.*

PROPOSITIO IX.

Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.

Combinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo rerum numero, v. g. octo alphabeti literis, quæritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter ſe combinari poſſint: hoc eſt quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illis fieri.

I. Datæ ſint igitur octo res, ſeu litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, ſcire volo omnes binorum combinationes. Inſtituantur duæ progreſſiones Arithmeticæ naturales deſcendentes, ſubducta unitate a numeris 8 & 2, tot ſcilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariæ dicitur) continet unitates, ut in *A* & *B* factum eſt. Ducantur deinde inter ſe 8 & 7; & productum 56 dividatur per productum 2 X 1, hoc eſt per 2, quotus 28 dat quæſitam binorum multitudinem.

A	*B*
2	8
1	7
2	56 (28

Hoc patet ex ſequenti 8 literarum combinatione.

ab	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*ag*	*ah*
bc	*bd*	*be*	*bf*	*bg*	*bh*	
cd	*ce*	*cf*	*cg*	*ch*		
de	*df*	*dg*	*dh*			
ef	*eg*	*eh*				
fg	*fh*					
gh						

II.

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iisdem 8 literis haberi possint Instituantur, ut supra factum est, duæ progressiones Arithmeticæ descendentes *C* & *D*, & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerum ternorum, qui petitur.

C	*D*
3	8
2	7
1	6
6	336

Corol. Eadem methodo inveniuntur omnes quaternarii, quinarii, senarii, &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellarum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum sortito extrahantur, binarii *per hanc Propos.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quinarii 43949268: unde difficillima in hujusmodi ludis divinandi ratio satis apparet.

PROPOSITIO X.

Ex dato rerum numero permutationes omnes possibiles invenire.

Permutatio distinguitur a combinatione in hoc, quod combinatio, dato rerum numero, ostendit quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii &c. ex eo rerum numero fieri possint, ut ex *Prop. præc.* manifestum est. Permutatio vero docet, quoties datæ illæ quantitates permutari queant, ita ut semper omnes accipiantur, variato solum ordine. En regula.

Sumantur tot numeri in serie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot sunt res datæ, v. g. quinque literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, productum ex terminis seriei natura-

lis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quæsitus, ut in *A* & *B* patet. Nam si dentur duæ tantum literæ *a*, *b*, possunt bis permutari, si quælibet semel primum locum, vel secundum occupet, *ab*, *ba*. Si vero dentur tres *a*, *b*, *c*, permutari possunt sexies. Quælibet enim occupare potest semel unum locum, & reliquæ duæ, ut modo dictum est, bis permutari. Nam cum *c* tenet ultimum locum, possunt duæ reliquæ *a*, *b* mutari bis, ac proinde habentur duo diversi ordines *abc*, *bac*. Rursus *b* occupante ultimum locum, permutari possunt bis duæ *a*, *c*; & sic duo novi exurgunt ordines *acb*, *cab*. Denique si *a* teneat ultimum locum, reliquæ duæ *c*, *b* bis permutari queunt, unde rursus alii duo habentur ordines *bca*, *cba*. En simul omnes trium litterarum *a*, *b*, *c* permutationes.

A	*B*
1	*a*
2	*b*
3	*c*
4	*d*
5	*e*
120	

a b c, *a c b*, *b c a*,
b a c, *c a b*, *c b a*,

Eodem discursu ostenditur literas quatuor *a*, *b*, *c*, *d*, permutationes 24 admittere, literas quinque, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, permutationes 120 &c.

Coroll. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

Tot tibi Virgo dotes, quot fulgent sydera Cælo

octo verbis constans, subire posse permutationes 40320, non tamen semper metri ratione servata.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, seu quot modis, variato ordine, disponi possint alicujus vocabuli literæ, ut *Roma*; cujus Anagrammata sunt *Amor*, *Mora*, *Ma-*

Maro, *Ramo*, *Armo*, &c. quæ olim ex depravato ejus ætatis gustu literatores in deliciis habebant.

PROPOSITIO XI.

Proponuntur aliqua Permutationum problemata.

1. SUnt Convitores 12, qui communi mensa utuntur, & quotidie singuli accumbendi locum variant, quæritur, quot annis absolvetur isthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12 progressionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. invenientur per *Prop. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas si dividas per dies 365 habebis annorum summam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia necessaria erunt ad omnes ejusmodi permutationes scribendas, etiamsi mille scriptores existant, qui quotidie paginas 40 scribant, & unaquæque contineat permutationes 50.

Inveniatur per *Propos. præc.* permutationum summa ex literis 24, quæ ex Tacquet est 620, 448, 401, 733, 239, 439, 360, 000. Duc 40 $\times$ 50 $\times$ 1000, productum 2000000 dat numerum permutationum singulis diebus scribendum, quem duc in dies 365, & per productum divide prædictam permutationum summam, quotus dabit numerum annorum quæsitum.

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, seu chori sunt *9*: quilibet chorus continet *6666* legiones, & legio quælibet Angelos *6666*, proinde omnium Angelorum numerus est *399*, *920*, 004; quæritur quot fieri possint Angelorum permutationes, seu quot mo-

modis ordinem inter se variare queant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.

I. Ducatur primus Arithmetice proportionalis datus in secundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet secundus Harmonicus.

3. Denique secundus Arithmeticus in tertium ductus tertium Harmonicum producet.

Sit exempl. Proportio Arithmetica	2, 3, 4,
efficit Harmonicam	6, 8, 12,
Similiter proportio Arithmetica	3, 7, 11.
efficit Harmonicam	21, 33, 77.

PROPOSITIO XIII.

Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.

DUC primum numerum datum in secundum, & productum divide per duplum primi minutum secundo, hoc est per differentiam dupli primi a secundo, quotus erit tertius Harmonice proportionalis.

Dati

Dati sint 3 & 4, quæritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc 3 × 4, & productum 12 divide per 6 — 4, hoc est per 2, quotus 6 dat numerum quæsitum. Similiter dati sint 6 & 8, quæritur tertius harmonicus. Duc 6 × 8, & productum 48 divide per 12 — 8, seu 4, quotus 12 est tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

Quod si primi termini duplum sit æquale, vel minus secundo termino, tunc tertius harmonice proportionalis inveniri non poterit; ut si dentur 3 & 6, vel 2 & 6.

PROPOSITIO XIV.

Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.

Datus sit numerus ex. gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos esse in proportione harmonica manifestum est. Nam..

60. 20 :: 60 — 30. 30 — 20.
30. 15 :: 30 — 20. 20 — 15.
20. 12 :: 20 — 15. 15 — 12.
15. 10 :: 15 — 12. 12 — 10.

Hinc patet haberi progressionem terminorum harmonice proportionalem.

Schol. I. *Harum trium propositionum demonstrationes ad Analysin speciosam remittimus, unde facillime eruuntur, quæ alioquin per viam syntheticam sunt operosæ.*

Schol.

Schol. II. *Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, seu Musicam constituere dicantur, est nimirum quia consonantias Musicas constituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus 3, 4, 6 inter 6 & 4 est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ* Diapente, *seu* Quinta *dicitur. Item inter 4 & 3 est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam* Diatesseron, *seu* Quartam *vocant. Deinde inter extremos 6 & 3 habetur proportio dupla quæ* Diapason, *seu* Octavam *consonantiam efficit.*

Schol. III. *Datur etiam proportio* Contr-harmonica *quæ habetur cum datis tribus terminis, differentia primi, & secundi est ad differentiam secundi & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic 3, 5, 6 sunt numeri contrharmonice proportionales: nam 2, differentia primi & secundi termini, est ad 1, differentiam secundi & tertii, ut 6 ad 3. Item 12, 10, 6 sunt contrharmonice proportionales; nam 2. 4 :: 6. 12. Hæc dicta sint in gratiam eorum, qui Musicam amant, aut instrumentis Musicis student, ut hinc numerorum scientiam sibi maxime necessariam intelligant.*

CAPUT VIII.

De Logarithmis, eorumque natura, atque usu.

CUM triangulorum resolutio, quæ per sinus, tangentes, & secantes habetur, absolvi debeat per regulam proportionum, in qua multiplicatio, & divisio, ob numeros septem, vel octo characteribus constantes, multum laboris, & tædii importare solet; hinc est, quod Joannes Neperus Scotus, vir nunquam satis laudandus, alios

lios numeros pro sinibus, tangentibus, & secantibus excogitavit, & ann. 1620 promulgavit, quorum ope sola additio præstat omne id quod præstare solebat multiplicatio, & subtractio idem efficit, quod divisio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & usum hic brevissime explicamus.

LEMMATA.

I. IN progressione Arithmetica quatuor terminorum summa duorum extremorum æquatur mediorum summæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit 4 + 1 = + 3.

Coroll. I. Hinc ut habeatur quartus Arithmetice proportionalis, ex summa secundi, & tertii termini aufertur terminus primus, residuum dat quartum Arithmetice proportionalem quæsitum.

II. In progressione Arithmetica trium terminorum, summa duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati sint 2, 5, 8, erit 2 + 8 = 10.

Coroll. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habeatur tertius, ex duplo secundo aufertur primus. Sic 10 — 2 = 8.

Coroll. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, si accipiatur eorum summæ semissis. Sint dati 2 & 8, eorum summæ semissis 5 est medius Arithmetice proportionalis ut patet.

PRO-

PROPOSITIO I.

De natura Log-morum, eorumque inventione

Log-mi sunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, seu respondentes numeris Geometrice proportionalibus: vel sunt numeri, qui Arithmeticam, ubi ii, quorum isti sunt Log-mi, Geometricam servant proportionem. Ut si concipiatur series quæcunque numerorum Geometrice proportionalium, ut in *A*, cui respondet alia series numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui crescant ut in *B* & *C*, vel decrescant, ut in *D*; omnes hi numeri *B* & *C*, *D* dicuntur Log-mi numerorum in *A* existentium,

A	*B*	*C*	*D*	*M*	*N*
1	1	0	100	1	0. 0000000
2	2	5	90	10	1. 0000000
4	3	7	80	100	2. 0000000
8	4	9	70	1000	3. 0000000
16	5	11	60	10000	4. 0000000
32	6	13	50	100000	5. 0000000
64	7	15	40	1000000	6. 0000000
128	8	17	30	10000000	7. 0000000
256	9	19	20	100000000	8. 0000000
512	10	21	10	1000000000	9. 0000000
1024	11	23	0	10000000000	10. 0000000

Quamvis autem Log-morum species possit assumi ad libitum, ut diximus, præstantissima tamen, & commodissima est illa, quæ cyphram, seu o ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliqui-

bus

bus cyphris, nempe 8, vel septem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progressione Arithmetica procedentibus, seu Log-mis illæ cyphræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de sinu toto respectu sinuum, tangentium, & secantium, utque calculus facilior evadat.

Coroll. I. Ex eo quod Log-mus unitatis sit, o, sequitur Log-mum numeri, qui sit minor unitate, ut sunt fractiones, minorem esse quam o, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & designatur nota —

Coroll. II. Omnes Log-mi numerorum ab 1 ad 10 exclusive habent o pro prima nota, qui sunt inter 10, & 100 habent pro primo numero 1; qui vero sunt inter 100, & 1000, habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & sic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5, &c. dicuntur *characteristici* sive *indicativi*: nam indicant quot figuris constat numerus absolutus, cujus sunt Log-mus, & puncto ab aliis separantur.

Coroll. III. Characteristica semper unitate minor est numero figurarum numeri absoluti. Hinc dato quovis numero absoluto v. g. 82050 quinque figurarum, statim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteristica, & sic de aliis.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si Log-mus unitate sit o, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.

SIT factum 24, cujus factores sunt 4 & 6, erunt quatuor termini Geometrice proportionales, *ex Defin. multiplicat.*, 1. 4 ∵ 6. 24, eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, *ex Propos.* 1. Sed Log-mi extremorum 1, 24, æquantur Log-mis 4. 6, *per Lem.* 1. Log-mus autem unitatis ex hypothesi est o; ergo si Log-mus unitatis sit o, Log-mus facti æquatur summæ ex Log-mis efficientium 4 & 6. Quod &c.

Coroll. I. Hinc sequitur, Log-mum numeri compositi plani, seu solidi æqualem esse aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel solidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur summæ Log-morum 3 & 24, aut 6 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus consurgit numerus 72.

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum esse Log-mi ejus radicis, & Log-mum cubi triplum Log-mi suæ radicis: nam factores quadrati, & cubi sunt idem numerus bis, vel ter sumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuscumque x^2, x^3, x^4, &c. dividas per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4, &c. habebis Log-mum radicis ejusdem dignitatis. Contra si Log-mum datæ radicis multiplices per exponentem alicujus dignitatis, habebis Log-mum ejusdem dignitatis. Sit $x^3 = 8$, ejusque Log-mus ex tabulis 0. 9030900: divide per exponentem 3 hunc

3 hunc Log-mum, quotus o. 3010300 erit Log-mus respondens radici 3; si vero Log-mum o. 3010300 multiplices per exponentem 3, habebis o. 9030900 Log-mum dignitatis ex, seu cubi 8.

PROPOSITIO III. & IV.

Si Log-mus unitatis est o, differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum.

Sint duo numeri 24 & 6, & differentia eorum Log-morum sit o. 6020600, dico hanc esse Log-mum quoti eorundem, nempe 4. Nam cum sit divisor ad dividendum, *ex Defin. divis.*, ut unitas ad quotum, erunt quatuor termini Geometrice proportionales 6, 24 :: 1, 4, eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo *per Lem.* 1. *hujus*, Log-mi numerorum 24, & 1 æquantur Log-mis extremorum 4 & 6; sed ex hypothesi Log-mus unitatis est o, ergo si ex Log-mo numeri 24 auferatur Log-mus divisoris 6, Log-mus residuus, seu differentia Log-morum 24 & 6, erit æqualis Log-mo quoti, nempe o. 6020600, qui respondet numero 4, nempe quoto. Quod &c.

Coroll. Hinc habetur, summam Log-morum divisoris, & quoti æqualem esse Log-mo dividendi.

PROPOSITIO IV.

Numeri cujuscumque Log-mum invenire.

Inveniendus sit Log-mus numeri 7. Statuatur progressio Geometrica 1, 10, 100, 1000. & as-

& assumantur Long- mi his terminis respondentes 0. 0000000. , 1. 0000000 , 2. 0000000 , 3. 0000000 &c. eo modo , quo dictum est *in Prop.* 1. *hujus* . Deinde unitatem *A* , & denarium *B* auge tot cyphris, quot placuerit , ut 7 , 8 , 9 &c. (hic cyphræ 6 adduntur) & inter *A* & *B* invenitur medius proportionalis Geometricus *C* , *per Prop.* 11. *Cap.* 6. *Arithm.* erit hic minor numero septenario , qui etiam intelligi debet auctus tot cyphris , quot aucta fuit ũnitas, nempe sex. Inveniatur ergo inter *C* minorem , & *B* majorem alius Geometrice proportionalis *D* , *per Propos. cit.* , qui pariter cum sit minor , quam 7, 000000 , poterit inter ipsum *D* minorem & *B* majorem inveniri medius Geometrice proportionalis *E* , nempe 7. 498942 , qui major est ipso 7. 000000 ; ideoque inter ipsum *E* , & proxime minorem *D* inveniatur medius Geometrice proportionalis *F* , qui minor est

A	1.000000	0.0000000
C	3.162278	0.5000000
B	10.000000	1.0000000
—		
C	3.162278	0.5000000
D	5.623413	0.7500000
E	10.000000	1.0000000
—		
D	5.623413	0.7500000
E	7.498942	0.8750000
B	10.000000	1.0000000
—		
D	5.623413	0.7500000
F	6.493816	0,8125000
E	7.498942	0.8750000
—		
F	6.493816	0.8125000
G	6.978306	0.8437500
E	7.498942	0.8750000
—		
G	6.978306	0.8437500
H	7.233942	0.8593751
E	7.408642	0.7850000
—		
G	6.978306	0.8437500
I	7.104974	0.8515625
H	7.233042	0.8593750
—		
G	6.978306	0.8427500
K	7.041355	0.8476562
I	7.104974	0.8515625

est ipso *E*; proinde inter *F* & *E* inveniri potest medius *G*, qui adhuc minor est ipso *E*. Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem, inveniuntur medii Geometrice proportionales *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* &c. donec tandem occurrat medius proportionalis $Z = 7.000000$, qui nullo penitus excessu, vel defectu differt ab ipso numero septenario.

Deinde sicut inter *A* & *B* inventus fuit medius Geometrice proportionalis *C*, sic inter eorum Log-mos inveniatur medius Arithmetice proportionalis, *per Corollar.* 2. *Lemm.* 2, nempe 0.5000000. Erit hic Log-mus ipsius numeri *C*. Eodem modo reperiri debent omnes alii Log-mi mediis Geometrice proportionalibus *D*, *E*, *F*; *G* &c. respondentes: quo facto: ha-

G	6.978306	0.8437500
L	7.009760	0.8457031
K	7.041355	0.8476562
G	6.978306	0.8437500
M	6.994015	0.8447266
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
N	7.001883	0.8452148
L	7.009760	0.8457031
M	6.994015	0.8447266
N	6.997936	0.8449707
O	7.001883	0.8452148
O	6.997936	0.8449707
P	6.999915	0.8450928
N	7.001883	0.8442148
P	6.999915	0.8450928
Q	7.000899	0.8451538
N	7.001883	0.8452148
P	6.999915	0.8451233
R	7.000407	0.8451233
Q	7.000899	0.8451538
P	6.999915	0.8450928
S	7.000161	0.8451233
R	7.000407	0.8451233
P	6.996915	0.8450928
S	7.000038	0.8450928
T	7.000161	0.8451080

bebis Log-mum numeri dati 7, nimirum 0. 8450980.

P	6.999915	0.8550928
V	6.999915	0.8450966
T	7.000038	0.8451004
—	———	———
V	6.999977	0.8450966
X	6.000007	0.8450985
T	7.000038	0.8451004
—	———	———
V	6.999977	0.8450960
Y	6.999992	0.8450975
X	7.000007	0.8450985
—	———	———
Y	6.000002	0.8450975
Z	7.000000	0.8450980
X	7.000007	0.8450985

Coroll. Hac methodo inveniuntur Log-mi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11 13, 17, 19 &c. Suppetunt tamen modi, quibus tantus labor imminuitur. Nam invento Log-mo numeri v. g. *6*, si hunc dividas, semissis dat Log-mum numeri 3. *per Coroll.* 2. & 3. *Propos.* 2. *hujus.* Item invento Log-mo numeri *6*; habetur Log-mus numeri 2, nam si dividas *6* per 3 quotus est 2: subtracto igitur Log-mo numeri 3 a Log-mo numeri *6*, residuum dat Log-mum quoti 2. *per Prop.* 3. *hujus.* Pariter subtrahendo Log-mum numeri 2 modo inventum a Log-mo numeri 10, habetur Log-mus quoti 5, *per Propos.* 3. *cit.*, & sic proportionaliter de aliis.

Coroll. Inventis Log-mis numerorum primorum, facile habentur Log-mi numerorum compositorum. Nam si Log-mum binarii duples, triples, quadruples &c. habebis Log-mos totius seriei 2, 4, 8, 16, 32, &c. si idem facies cum Log-mo ternarii, habebis seriem Log-morum pro numeris 3, 9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compositus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi supponuntur jam cogniti; si addas eorum Log-mos, habe-

habebis Log-mos omnium numerorum compositorum per *Prop.* 2. *hujus*. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-mum, præter characteristicam, ut vides in *A* & *B*.

A		*B*	
1	0.0000000	3	0.4771212
10	1.0000000	30	1.4771212
100	2.0000000	300	2.4771212
1000	3.0000000	3000	3.4771212

Schol. I. *Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, seu absolutis ab* 1 *usque ad* 20000, *&* *a* 90000 *usque ad* 100000, *primus construxit Henricus Briggius Anglus in Academia Oxoniensi ex consilio Jo: Neperi primi horum inventoris. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox implevit Adrianus Ulacq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

PROPOSITIO V.

Multiplicare duos numeros, qui minores sint quam 10000.

Sint multiplicandi inter se duo numeri 144, & 64, quorum Log-mi ex tabulis 2. 1583625, & 1. 8061800, quæritur factum. Adde simul duos Log-mos inventos, summa dabit Log-mum 3. 9645425, cui in tabulis respondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144, & 64.

Demonstr. patet ex *Prop.* 2. *hujus*.

Schol. *Si summa duorum Logarithmorum supe-*

ret 4. 0000000, *qui est maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus.*

PROPOSITIO VI.

Numerum integrum minorem, quam 10000 *per alium dividere.*

SIT numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis est 3. 9645425. Divisor sit 64, cujus Log-mus est 1. 8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi subtrahe Log-mum divisoris, Log-mus residuus, nempe 2. 1583625, in tabulis quæsitus dat quotum 144.

Demonst. patet ex *Prop.* 3. *hujus.*

Schol. *Cum Log-mus ille residuus non invenitur in tabulis præcise, signum est, quoto minutiam aliquam adhærere, quæ quanta sit, reperietur, ut mox docebimus.*

PROPOSITIO VII.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.

SInt dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus secundi addatur Log-mo tertii, & a summa subtrahatur Log-mus primi, Log-mus residuus dat in tabulis numerum quæsitum.

Demonst. patet ex *Lemm.* 1.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, sed numerum 10, 000, 000 non excedentibus.

SIT numerus datus 923754, cujus Log-mus quæritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex residuis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cyphris, quot sunt ipsæ figuræ residuæ, nempe $\frac{54}{100}$.

Log-mus jam inventus subtrahatur a Log-mo proxime sequenti, nempe a Log-mo numeri 9238.

Num. 9238, *Log.* 3. 9655779
Num. 9237, *Log.* 3. 9655309

Diff. Log. —— 470

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Log-morum 470 ad quartum proportionalem $253\ \frac{80}{100}$

4. Adde 253 (fractio negligi potest) Log-mo primum invento, fiet Log-mus 3. 9655562.

5. Tandem characteristica tot unitatibus augeatur, quot sunt cyphræ in divisore (ut hic 2) erit Log-mus quæsitus 5. 9655562.

Demonstr. Certum est, quod si numerus 9237 cresceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis est differentia duorum Log-morum se integra unitate superantium: sed

ſed creſcit tantum $\frac{54}{200}$, nam diviſus per 100, quotus eſt 9237 $\frac{54}{100}$, ergo per regulam proportionum inquirendum eſt, quantum augeri debeat Log-mus ejuſdem numeri 9237 ratione earum partium $\frac{54}{100}$, quæ quidem minus ſunt, quam integra unitas, ſeu $\frac{100}{100}$. Inſtituta itaque regula proportionum, invenitur Logmum primo inventum, nempe 3. 9655309, augendum eſſe partibus 253, fitque Logarithmus 3. 9955562 pro numero 9237 $\frac{54}{100}$.

Demum characteriſtica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cyphræ fuerunt in diviſore (ut hic 2) ob diviſorem 100. Nam numerus datus cum diviſus ſit per 100, eſt numerus quotus: ſed *per Coroll. Prop. 3. hujus*, ſumma Log-morum diviſoris & quoti æqualis eſt Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Logmus dividendi 923754, addi debet Log-mo quoti 3. 9655562 Log-mus diviſoris 100, nempe 2. 000000, quod, ut compendioſius fiat, ſatis eſt augere characteriſticam duabus unitatibus, ut patet.

Corol. I. Si daretur numerus major, quam 10, 000, 000 (quod in praxi vix contingit,) hæc regula non ſufficeret. Nam creſcentibus numeris abſolutis, differentiæ Logarithmorum decreſcunt, ita ut tandem evaneſcant, & fiant omnino æquales ipſi Logarithmi. Sic numeri 2656385774, & 2656384775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log-mum 9. 4242911, ut ex tabulis majoribus Briggii apparet. Ideoque inſtitui non poſſet regula proportionum, cum deſit differentia Log-morum.

Corol. II. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log-mi ſupputati ad denarii Log-mum, 1. 0000000, ut in tabulis communibus factum eſt, ſunt

ſunt inter ſe æquales. Quapropter ſi daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, ſufficeret pro ejus Log-mo ſumere Log-mum primum decem figurarum, quod notaſſe valde utile erit.

Schol. *Si numerus datus dividi poteſt per quoſcunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam* 10000, *ſumma Log-morum diviſoris & quoti dat Log-mum numeri dati. Sit numerus datus* 12456, *divide per* 3 *fit* 4152, *adde ſimul Log-mum numeri* 3, *nempe* 0. 4771212, *& Log-mum numeri* 4152, *nempe* 3. 6182573, *ſumma* 4, 0953785 *dat Log-mum dati numeri.*

Similiter ſit numerus datus 98796, *divide per* 2 *fit* 49398, *& hunc iterum per* 2 *fit* 24699, *& hunc per* 3 *fit* 8233, *qui minor eſt quam* 10000; *adde ſimul Log-mos omnium diviſorum* 2, 2, 3, *ſeu* (*idem enim eſt*) per Cor. 1. Prop. 2. *hujus ſume Log-mum numeri ſolidi compoſiti ex* 2, 2, 3, *ideſt* 12, *qui eſt* 1. 0791812, *cui adde Logarithmum ultimi quoti, nempe* 8233, *qui eſt* 3. 9155581: *ſumma* 4. 9947393 *eſt Log-mus dati numeri* 98796.

PROPOSITIO IX.

Datæ fractionis Log-mum invenire.

I. Subtrahe Log-mum numeratoris e Log-mo denominatoris, & reſiduo Log-mo præpone ſignum ſubtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis $\frac{2}{5}$.

Log. 5.

$$\begin{array}{l} Log.\ 5. = 0.\ 6989700 \\ Log.\ 2. = 0.\ 3010300 \\ \hline Log.\ \frac{2}{5} = -\ 0.\ 3979400 \end{array}$$

2. Si fractionis datæ numerator sit major denominatore, ut $\frac{9}{5}$ subtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; residuum dat Log-mum quæsitum

$$\begin{array}{l} Log.\ 9. = 0.\ 9542425 \\ Log.\ 5. = 0.\ 6989700 \\ \hline Log.\ \frac{9}{5} = 2552725. \end{array}$$

3. Si vero fractio data integris adhæreat, integri reducantur in unam fractionem, & eodem modo habebitur Log-mus, ut $3\ \frac{2}{7}$ fiant $\frac{23}{7}$, erit

$$\begin{array}{l} Log.\ 23 = 1.\ 3617278 \\ Log.\ 7\ = 0.\ 8450980 \\ \hline Log.\ 3\frac{2}{7} = 0.\ 5166298 \end{array}$$

Similiter quæritur Log-mus numeri $354\ \frac{3}{4}$ reduc numerum datum ad fractionem, erit $\frac{1419}{4}$, & aufer Log-mum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Logarithmus quæsitus.

Log.

$$\begin{aligned} Log.\ 1419 &= 3.\ 1519824 \\ Log.\ 4 &= 0.\ 6020600 \\ \hline Log.\ \tfrac{1419}{4} &= 2.\ 5499224 \end{aligned}$$

Ratio regulæ eſt, quia cum fractio ſit quotus proveniens ex diviſione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti eſt æqualis, *per Prop. 3. hujus*, differentiæ Log-mórum diviſoris & dividendi, ideſt numeratoris & denominatoris, ideoque ubi numerator minor eſt denominatore, ac proinde per eum dividi non poteſt, Log-mus major e minori ſubtrahendus eſt: quo in caſu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis ſignum negativum —. Quod &c.

Log-mus integri cum fracto poteſt enim haberi ſic. Sit numerus datus 3560 $\frac{3}{4}$, ſume differentiam Log-morum numeri 3560 & numeri 3561 proxime ſequentis, cujus prioris numeri Log-mus eſt 3. 5514500; ſecundi numeri eſt 3. 5515720, differentia erit 1220. Dic jam per regulam proportionum, ut 4 ad 3, ita 1220 ad 915. Adde 915 ad Log-mum numeri 3560, nempe 3. 5514500, habebis Logarithmum integri cum fractione, ſc. 3. 5515415, Quod &c.

PROPOSITIO X.

Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non exiſtit, invenire numerum ei reſpondentem.

SI Characteriſtica dati Log-mi ſit 0, vel 1, vel 2, mutetur in 3, & quæratur inter 1000, & 10000

10000 Log-mus, qui sit proxime minor Log-mo dato, habebitur numerus quæsitus, tot fractiones decimales adjunctas habens, quot unitates Characteristicæ accesserunt.

Sit datus Log-mus 1. 9201662, qui non reperitur exacte in tabulis, Characteristica 1 fiat 3, erit 3. 9201662. Quære hunc inter 1000, & 10000, invenies numerum 8320 respondentem Log-mo 3. 9201233, qui est proxime minor Log-mo dato, ut patet. Numerus ergo quæsitus erit 83 $\frac{20}{1000}$, ob duas videlicet unitates, quibus aucta fuit Characteristica.

Si Log-mus datus habeat Characteristicam 3, & non reperiatur accurate in tabulis, ut Log-mus 3. 5163954, erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 respondentem Logarithmo 3. 5162709, qui est proxime minor Log-mo dato.

2. Subtrahe hunc Log-mum a proxime sequenti 3. 5164031, & fiet differentia prima 1322.

3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipsomet Log-mo dato, erit secunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad secundam 1245, ita denominator futuræ fractionis ad libitum assumptus 100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94. erit ergo numerus quæsitus Log-mi dati 1283 $\frac{94}{180}$

Demonstr. Eodem fere modo, quo *Prop.* 8. *hujus*. Nam differentia Log-morum prima est differentia unitatis, quæ ita se habet ad differentiam secundam, Log-mi scilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Logari-

rithmorum differentiæ sunt minores, ac proinde, quæ capienda est pars proportionalis, ibi exactior habetur.

Schol. *Ubi tamen in minimis scrupulosi non sumus, ad praxim satis est sumere numerum respondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejusmodi negligere.*

PROPOSITIO XI.

Dato Logarithmo defectivo, numerum ei respondentem invenire.

Sit datus Log-mus defectivus — 0. 2218488, quæritur fractio, quæ ei respondeat.

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel 1000, vel 10000, e cujus Log-mo 2.0000000, vel 3. 0000000, vel 4. 0000000 subtrahe datum Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum respondentem Log-mo residuo 2. 7781512, qui dat 600 pro numeratore quæsitæ fractionis; habes ergo $\frac{600}{1000}$, seu $\frac{3}{5}$.

Log. num.	1000 =	3. 0000000
Log. def.	=	— 0. 2218488
Log. ref.	=	2. 7781512, *qui dat 600*

Est ergo $\frac{600}{1000}$, *seu* $\frac{3}{5}$.

Similiter fit Log-mus defectivus — 0. 3679767, quem subtrahe ex 4. 0000000, residuum 3. 6320233 in tabulis quæsitum dat 4285 pro numeratore fractionis. Habes ergo $\frac{4285}{10000}$.

Log.

Log. num. 1000 = 4. 0000000
Log. def. = – 0. 3679767

Log. resid. = 3. 6320233, *dat* 4285 *proxime*
Est ergo $\frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}$

Demonstr. ut Propos. 9.

PROPOSITIO XII.

Dato Log-mo excedente Log-mum 4. 0000000 *numerum ei congruum invenire.*

1. A Dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut scilicet residuum sit proxime minus Log-mo 4. 0000000, qui est tabularum maximus.

2. Quæratur ex tabulis numerus conveniens huic residuo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus ablatus fuit a Log-mo dato, factus est numerus quæsitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7. 8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc est 4. 0000000, relinquetur Log-mus 3. 8372413, cui ex tabulis respondet numerus 6874 cum fractione $\frac{5032}{10000}$, per *Prop.* 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæsitus 68745032.

Log. 7. 8372413
Log. 4. 0000000

Log. 3. 8372413, *qui dat* 6874 $\frac{5032}{10000}$.

Duc

Duc in 10000, *fit* 68745032.

Similiter ſit datus Log-mus 8. 2718416, ex quo aufer Logarithmum 4. 0000000; remanet 4. 2718416, qui adhuc major eſt, quam 4. 0000000. E reſiduo igitur Log-mo 4. 2818416 rurſus aufer 1. 0000000, remanet 3. 2718416, cui ex tabulis reſpondet numerus 1870, quem multiplica per 10000 & ulterius per 10, factum 187000000 erit numerus quæſitus.

Demonſtr. Subducere Log-mum numeri 10, 100, 1000 &c. a Log-mo dato, eſt idem ac numerum quæſitum dividere per 10, vel 100, vel 1000 &c. erit ergo diviſor 10, vel 100 &c. ad dividendum quem voco Z, ut unitas ad quotum; ergo *per Prop.* 3. *hujus*, differentia Log-morum diviſoris, & dividendi, (hoc eſt in ſecundo exemplo Log-mus 3. 2718416) æquatur Log-mo quoti, cui ex tabulis reſpondet numerus 1870. Cum igitur ſint proportionalia 100000 ad Z, ita 1 ad 1870; duo extrema ad invicem multiplicata æqualia ſunt mediis *per Propoſ.* 16. *lib.* 6. *Eucl.*, ideſt $Z = 187000000$. Quod &c.

Schol. *Cum reſiduum ex diviſione ſuperat dimidium diviſoris, additur quoto unitas. Sic in priori exemplo pro quoto* 5031, *ſumitur* 5032. *Nam diviſis* 3180000 *per* 632 *remanet* 408. *Quod pro hujuſmodi calculis nota. Quæ ſequuntur,* Trigonometriæ *doctrinam ſupponunt.*

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Dati cujuscumque Sinus Log-mum invenire.

UT Log-mi Sinum accuratiores inveniantur, supponitur Sinus constructos fuisse ad radium saltem 1000000000, & tribus deinde ultimis notis multatos, quales sunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic sinus ex. gr. grad. 5 supputatus ad Sinum totum 10000000000 est 871557427, qui in tabulis multatus reperitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet considerari debeat tanquam numerus aliquis absolutus, & vulgaris, Log-mi Sinuum quorumcunque habentur *per Propos. 8. hujus*. Sed ut facilior, & accuratior quoque sit eorum inventio, necesse erit ad manum habere majorem Log-morum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri potest, notas ascendant.

Log-mi autem Sinuum respicere debent Sinus ipsos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, respectu scilicet ad signum totum 10000000000. Sinus itaque ex. g. grad. 5, qui in tabulis Ulacq est 871557, habet pro suo Log-mo 8. 9402960.

Pariter grad. 61, 50 Sinus est 8815782, Log-mus vero 9. 9452609. Ex Characteristica enim, quæ semper unitate minor esse debet numero figurarum ipsius sinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit sinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus grad. 23, qui supputatus ad Sinum totum 10000000000 est 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Log-morum numerus, qui respondeat quinque notis

tis ad finistram, cujus Log-mus est 4. 5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop.* 8., inventa differentia Log-morum numeri 39073, & 39074 proxime sequentis, quæ est 111; dic ut 100000. ad 111, ita notæ residuæ dati Sinus 11284 ad quartum proportionalem, nempe 12, qui si addatur Log-mo jam invento 4. 5918768 prodit Log-mus quæsitus, hoc est 9. 5918780, mutata Characteristica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus, atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

Coroll. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10. 0000000, ex quo si Log-mus aliquis auferatur, residuum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut si ex ipso Sinu toto 10. 0000000 auferatur Log-mus Sinus grad. 23, nempe 9. 5918780, residuum 0. 4081220 dicitur complementum Arithmeticum ejusdem Sinus, quo utemur inferius.

PROPOSITIO XIV.

Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium dati arcus.

Tangentium, & Secantium Log-mi inveniri possunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, sed compendiosius habentur sic.

1. Sume Log-mum Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A summa aufer Log-mum complementi ejusdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, residuus erit Log-mus Tangentis quæsitus. Inveniendus sit Log-mus Tangentis grad. 23.

Adde Log. sin. 23.	=	9. 5918780
Log. sin. tot.	=	10. 0000000
Summa		19. 5918780
Log. complem.		9. 9640261
Tangen. Log.		9. 6278519

Demonstr. Patet ex *Probl. 6.* Trigonometriæ Tacquet, in qua ostensum fuit, ita se habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejusdem arcus, ut Sinus totus ad Tangentem quæsitam: quæ ut inveniatur, adduntur secundus & tertius terminus, & a summa subtrahitur primus *per Prop. 7. hujus*.

2. At vero pro inveniendis Secantibus dati arcus, duplari debet Log-mus Sinus totius, & ex duplo auferri Sinus complementi ejusdem arcus, nam residuum dabit Log-mum Secantis quæsitæ. Sit exemplum. Quæritur Log-mus Secantis pro dato arcu grad. 23.

Log. sin. tot.	=	10. 0000000
Ejus duplum	=	20. 0000000
Log. sin. comp.	=	9. 0000000
Secan. Log.	=	10. 0359739

Demonstr. ex *Probl. 6. cit.* deducitur. Nam sunt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæsita, ut ibi ostenditur. Ut ergo habeatur tertius

Ari-

Arithmetice proportionalis, illis respondens, hoc est Log-mus Secantis, ex duplo secundi termini aufertur primus, *per Cor.* 1. *lemm.* 2.

Coroll. I. Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus Tangentis, vel Secantis, signum est, illum præter minuta prima, continere etiam secunda, quæ si quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop.* 10. pro inveniendis fractionibus. Quod si ea diligentia opus non sit, satis erit sumere gradus cum minutis primis, quæ Log-mo proxime minori respondent.

Coroll. II. In Tab. Ulacq Log-mi Sinuum non habent Characteristicam majorem, quam 9. Proinde si, calculo absoluto, ex Log-morum additione resultet Characteristica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a sinistris abjicitur, sitque Characteristica, 0, 2, 5 &c.

Coroll. III. Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45. minores sunt. A gradibus vero 45 usque ad 90 Log-morum Tangentes non habent Characteristicam majorem 13. Idcirco si, post additionem factam, Characteristica duabus constet figuris, tunc vel secunda figura excedit 3, & in hoc casu abjicitur prima, sive sit unitas, sive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima ut in *B* patet.

A		*B*	
Tang. Log.	24. 6040810	*Tang. Log.*	21. 2162581
fit	4. 6040812	*fit*	11. 2162581

Schol. I. *Regula Trium etiam per solam Log-morum additionem potest absolvi, si sumatur prioris termini complementum Arithmeticum*, per Cor. Prop. 13, *& ad duos reliquos addatur. Dati sint tres numeri*

meri proportionales 4 , 60 , 25 , *quæritur quartus*. *Prioris numeri* 4 *complementum Arithmeticum est* 9 , 3979400 , *addatur ad Log-mos duorum numerorum* 60 *&* 25 , *summa dabit Log-mum quæsitum*.

Num. 4.	*Compl. Arith.*	9. 3979400
	Num. 60 *Log.*	1. 7781512
	Num. 25 *Log.*	1. 3979400
	Summa	12. 5740312
	Fit (*per Cor.* 2.)	2. 5740312 , *dat in Tab.* 375

Schol. II. *Si Sinus totus sit primus , vel unus ex terminis regulæ Trium , potest omitti ; nam in primo casu est* 0 ; *& in secundo addit unitatem mox delendam*.

Schol. III. *Log-mi Sinuum vocantur absolute Log-mi , sed Log-mi Tangentium peculiari nomine* Mesologarithmi , *& Log-mi Secantium* Tomologarithmi . *In tabulis inveniri non solent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui possunt , ut vidimus ; vel quia sine ipsis calculus bene potest institui . Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus secundus , & ab aliis* Cosinus. *Tangens , & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans secunda , vel* Cotangens , *&* Cosecans: *quæ nomina si ignorentur , auctores Trigonometrici difficile intelliguntur*.

Schol. IV. *Log-morum usus patet in omnem fere Mathesin . Nos pauca hic Problemata delibabimus. Plura videri possunt apud Ulacq , Cavalerium , & alios*.

PRO-

PROBL. I.

Dati numeri quadratum, vel cubum per Log-mos invenire.

1. Datus sit numerus v. g. 18. cujus quadratum quæritur. Duplica numeri dati Log-mum, summa dabit Log-mum quadrati quæsiti.

Num. 18, *Log.* 1. 2552725
1. 2552725

Summa 2. 5105450, *dat in Tab. quadr.* 324

2. Pro inveniendo ejusdem numeri 18 cubo, sume ter, seu multiplica per 3 Log-mum ipsius numeri, productum dabit Log-mum cubi quæsiti.

Num. 18, *Log.* 1. 2552725
3

3. 7658175, *dat in Tab. cubum* 5832

Coroll. Hinc apparet ratio, cur ad extrahendam ex quocumque dato numero radicem quadratam, vel cubicam, accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata, aut tertia pars pro radice cubica; cum quadratum ex Log-mo bis sumpto, cubus vero ex Log-mo ter sumpto prodeat. Item quarta, quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis.

PROBL. II.

Inter duos numeros datos invenire quotcumque medios proportionales,

1. INveniendus sit medius proportionalis inter 20, & 320. Adde eorum Log-mos, dimidiæ summæ Log-mus dat medium proportionalem quesitum 80.

Num. 20, *Log.* 1. 3010300
Num. 320, *Log.* 2. 5051500

Summæ Log. 3. 8061800
Dimid. Log. 1. 9030900, *dat in Tab.* 80.
Est autem ∺ 20, 80, 320.

2. Inveniendi sint inter duos numeros datos duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii proportionales; regula generalis est: aufer Log-mum numeri minoris ex Log-mo numeri majoris, & hujus residui tertiam partem, si duo medii quærantur: vel quartam, si tres: vel quintam, si quatuor, adde Log-mo numeri minoris, nam summæ Log-mus dabit in Tab. medium proportionalem, qui proxime consequitur numerum datum minorem.

3. Ut habeantur medii proportionales reliqui; adde summæ præcedenti eandem tertiam, vel quartam, vel quintam Log-mi partem, summa dabit in Tab. reliquos medios proportionales quæsitos, ut exempla, quæ sequuntur, rem satis illustrant. Signa + & — additionem, & subtractionem indicant. *Q* vero Log-mum quoti addendum.

3. In-

4. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

Num. 120, *Log.* 2. 0791812
Num. 15, *Log.* — 1. 1760913

Resid. 0. 9030899
Divid. per 3, *dat Q.* 0. 3010299
Num. 15, *Log.* + 1. 1760913

Summæ Log. 1. 4771212 *dat in Tab.* 30
Q. Log. + 0. 3010299

Summæ Log. 1. 7781511, *dat in Tab.*60
Sunt ergo ∺ 15, 30, 60, 120, *ut patet*.

5. Quærantur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

Num. 1620, *Log.* 3. 2095150
Num. 20, *Log.* — 1. 3010300

Resid. 1. 9084850
Divid. per 4, *dat Q.* 0. 4771212
Adde num. 20 *Log.* + 1. 3010300

Summæ Log. 1. 7781512, *dat in Tab.* 60
Q. Log. + 0. 4771212

Summæ Log. 2. 2552724, *dat in Tab.* 180
Q. Log. + 0. 4771212

Summæ Log. 2. 7323936, *dat in Tab.*540
Sunt ergo in continua proportione ∺ 20, 60, 180, 540, 1620.

Schol. *Hæc sane pulcherrima Log-morum praxis ob sui facilitatem & brevitatem mihi tanti esse videtur, ut propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiscendam esse putem. Unum aliquem ejus usum ex innumeris, qui afferri possent, indicabimus in sequenti* Probl. num. 5.

PROBL. III.

Quæstiones aliquot Arithmeticæ per Logmos expediuntur.

1. DAntur fœnori scuta 500, & ex Singulis 100 lucrum est scutorum 5, quæritur quot annis ea sors duplicabitur.

Ex Log-mo numeri 100 subtrahe Log-mum numeri 5, Log-mus residuus in Tab. dat annos quæsitos.

Num. 100, *Log.* 2. 0000000
Num. 5, *Log.* 0. 6980700

Log. resid. 1. 3010300, *dat in Tab.* 20

Quod quidem manifestum est: nam si scuta 100 anno 1 dant 5, scuta 500 annis 20 dant 500 per regulam proportionum compositam ex *Propos.* 2. *Cap.* 6. *Arith.*

Coroll. Si tempus, quo sors illa duplicatur, ut supra inventum dividas, per 2, per 4, vel 5 &c. habebis tempus, quo sortis ejusdem dimidium, seu quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo annos 30 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requiritur ad lucrandum ejusdem sortis quartam partem, hoc est scuta 125, ut patet.

2. Ac-

2. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fœnore auctio sortis. Nihil fuit solutum toto triennio. Quæritur quantum debeat, ut propositum fuit in *Propos.* 13. *Arith. num.* 5.

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio sortis ad sortem una cum fœnore $\frac{110}{100}$, seu $\frac{11}{10}$. Auferatur numeri 10 Log-mus 1. 0000000 ex numeri 11 Log-mo 1. 0413927, residuum, seu Log-mus 0. 0413927 erit ratio sortis ad sortem una cum fœnore unius anni. Sumatur ergo hujus residui Log-mus toties, quot sunt anni (ut hic ter) eique addatur sortis 500 Log-mus 2. 6989700; summæ Log-mus 2. 8231481 in Tab. quæsitus dabit pro sorte & usura ejus triennii aureos 665 cum dimidio circiter, ut in *Propos. cit.* fuit inventum.

Num. $\frac{11}{12}$	*Log.*	1. 0413927	
	Log.	1. 0000000	
Resid.	*Log.*	0. 0413927	
Anni 3		3	
	Log.	0. 1241781	
Sortis 500	*Log.*	2. 6989700	
Summæ	*Log.*	2. 8231481,	*dat* $665\frac{3258}{10000}$.

3. Pupilli alicujus bona, quæ æstimata fuerunt scutorum 1600, accepit Hortensius pacto augendi quotannis sortem ex fructibus ad rationem scutorum 5 in singula centena. Retinuit illa annis 6, mensibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum

Cum scuta 100 fiant 105, erit proportio sortis ad sortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, seu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1. 3010300 ex numeratoris 21 Log-mo 1. 3222193, residuum 0. 0211893 erit ratio sortis ad sortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 sumi debet sexies, seu duci in 6, fitque 0. 1271358.

Ut habeantur menses, ac dies, dividatur Log-mus ille residuus 0. 0211893 per 12, quotus 0. 0017657 dat Log-mum, quinquies sumendum pro 5 mensibus datis, nempe 0. 0088285. Hic deinde divisus per 30 $\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0. 0005790, qui sumendus est decies pro diebus 10, fitque 0. 0005790. Addatur his Log-mus 3. 2041200 pro sorte scutorum 1600, habetur ex horum summa Log-mus 3. 3406633, qui in Tab. quæsitus dat numerum, seu scuta 2191 pupillo ipsi ab Hortensio debita.

Pro annis	6	*Log.*	0. 1271358
Pro mens.	5	*Log.*	0. 0088285
Pro diebus	10	*Log.*	0. 0005790
Pro sorte	1600	*Log.*	3. 2041200
		Summa	3. 2041200

4. Fingamus eundem Hortensium debere alteri summam illam scut. 1600 solvendam post annos 6, menses 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, siquidem scuta 5 ex singulis 100 a creditore sibi relaxentur. Quæritur quantum debeat solvere?

Hæc quæstio eadem ratione solvitur, dummodo

ex Log-mo 3. 2041200 fortis 1600 auferatur fumma Log-morum pro annis 6, menfibus 5, & diebus 10, ut fupra inventa, nempe 0. 1365433. Nam refiduus Log-mus 3. 0675767 in Tab. quæfitus dat fummam folvendam fcut. 1168.

Pro annis	6 *Log.*	0. 1271358
Pro menf.	5 *Log.*	0. 0078285
Pro diebus	10 *Log.*	0. 0005790
	Summa	0. 1365433
Scut.	1600 *Log.* —	3. 2041200
	Refid.	3. 0675767, *dat* 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, reftituuntur poft annos fex una cum annuis ufurarum ufuris, quæ fimul cum forte conficiunt fummam fcut. 1340; quæritur fingulorum anniorum ufura cum ipfa forte, & quanta fuerit ex fingulis 100 ufura.

Inveniantur inter duos numeros 1000 & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) *per Probl.* 2. Dabunt illi fummas quæfitas, hoc eft fortem una cum uniufcunque anni ufura. En totius operationis typus.

Scuta 1340	*Log.*	3. 1271048
Scuta 1000	*Log.* —	3. 0000000

Re-

Resid. 0. 1271048
Divide per 6, dat Q. 0. 0211841

Log-mus sextæ partis, quem voco *Q.* addatur primum Log-mo sortis 1000, summa dabit Log-mum pro sorte, & usura primi anni *A.* Adde deinde huic summæ Log-mum ipsum *Q*, nova summa dabit Log-mum pro sorte & usura secundi anni *B*; & sic deinceps addendo præcedenti summæ Log-mum eundem *Q*, aggregatum dat Log-mum pro sorte & lucro annorum *C*, *D*, *E* &c.

Log.		3. 0000000	
Q. Log.	+	0. 0211841	
			A
Log.		3. 0211841 *dat sc.*	1050
Q. Log.	+	0. 0211841	
			B
Log.		3. 0423682 *dat sc.*	1102
Q. Log.	+	0. 0211841	
			C
Log.		3. 0635523 *dat sc.*	1157
Q. Log.	+	0. 0211841	
			D
Log.		3, 0847364 *dat sc.*	1215
Q. Log.	+	0. 0211841	
			E
Log.		3. 1059205 *dat sc.*	1276

Q. Log.

Q. *Log.* + 0. 0211841

Log. 3. 1271046 *dat sc.* 1340 F

Inventa autem usura prima anni *A* una cum sorte, scutis scilicet 1050, statim innotescit quanta fuerit ex singulis 100 usura. Nam si 1000 fiunt 1050, scuta 100 per regulam proportionum fiunt 105, adeoque usura fuit scut. 5 ex singulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur *ex Coroll. Prop.* 13. *Cap. 6. Arithm.*, *&* *ex præc. Probl.*

PROBL. IV.

Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.

1. EXperientia constat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli semirecti, seu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo semirecto æqualiter distantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales esse. Sit igitur experimento cognitum ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, explosum fuisse globum ad distantiam passuum 4000; quæritur, quanta futura sit distantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi servata) ad datam elevationem gr.30.

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut sinus totus ad sinum anguli 30 duplicati, seu 60, ita passus 4000. ad quartum proportionalem; adeoque per *Schol.* 1. *&* 2. *Propos.* 14.

Gr.

Gr. 60, *Log.* 9. 9375306
Paſs. 4000, *Log.* 3. 6020600

Summa 13. 5395906

Fit (*Cor.* 2. *Prop.* 14) 3. 4395906, *dat paſs.* 3464

2. Quod ſi e converſo data ſcopi diſtantia, ex. gr. paſſuum 1500, ad quem ictus eſt dirigendus, quæratur in ipſomet tormento elevationis augulus; fiat ut diſtantia maximi ictus, ex. gr. paſſuum 4000, ad elevationem gr. 45, ita diſtantia data paſſuum 1500 ad angulum elevationis quæſitæ. Itaque duplicato angulo 45, ut in primo caſu factum eſt, erit per *Schol.* 1. & 2. *Prop.* 14.

Paſs. 4000 *Compl. Arithm.* 6. 3979400
Paſs. 1500. *Log.* 3. 1760913

Summa 9. 5740313, *dat gr.* 221.

Schol. *Quam ſingulari facilitate per Log-mos confici poſſint Tabulæ, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari poſſint, quæque ad utramque hujus problematis partem maxime inſerviant, facile eſt intelligere.*

PROBL. V.

Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.

STatue in plano aliquo horizontali ſtylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipſum planum, qui diviſus intelligatur in partes æquales

les 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Calendaria innotescit) metire umbram, quam projicit stylus; sitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum stylus continet 100. Erit per *Probl.* 5. *Tacquet. Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad styli longitudinem 100, ita longitudo ipsius umbræ, prout est Sinus totus, ad longitudinem styli, prout est Tangens anguli altitudinis Solis, seu Æquatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 19, nempe per *Schol.* 1. & 2 *Prop.* 14.

*Long.*89. *Compl. Arith.* 8. 0506100
Long. 100 *Long.* 2. 0000000

10. 0506100, *dat gr.* 48. 19,

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 41, est altitudo Poli Urbis Romæ quæsita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inventa est gr. 41. 54, seu gr. 42 proxime. Proinde Æquatoris altitudo Romæ est gr. 48.

Schol. I. *Ceterum plures sunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per stellas, elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam sit maxime necessarium, & Astronomiæ universæ sit veluti basis & fundamentum.*

Schol. II. *Ut habeantur altitudines meridianæ signorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Æquatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Astronomicis passim occurrunt. Sic declinatio*

tio Solis in principio signorum Borealium ♉ & ♍ est gr. 11. 30. Hos adde ad Æquatoris altitudinem, quæ Romæ, ut diximus, est gr. 48, erit altitudo meridiana Solis ♉ & ♍ initium ingressi gr. 59. 30. Quod si altitudinem meridianam Solis quæras pro initio signorum Australium ♐ & ♒, subtrahe ab Æquatoris altitudine, nempe ex gr. 48, eorum declinationem, quæ est gr. 20. 12, residuum dat gr. 27. 48 pro altitudine meridiana quæsita.

PROBL. VI.

In linea meridiana Zodiaci signa describere.

Ducta in aliquo plano horizontali linea meridiana, prout in elementis Sphæricis docetur, quam singulis diebus Sol per foramen exiguum transiens, in ipso meridiei momento tangat, describenda sint in illa Zodiaci signa, nempe ♈, ♉, &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoscendum tempus, quo Sol ea signa ingreditur, atque percurrit.

Metire altitudinem gnomonis, seu muri usque ad foramen illud, per quod Sol transit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet mensura. Tum inventis altitudinibus meridianis signorum Cœlestium, *per Schol. 2. Probl. 5.*, habebis earum complementa, & complementorum ipsorum Mesolog-mos, seu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout est Sinus totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis signi, seu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias,

cias, quibus distabit ab initio lineæ meridianæ signi cœlestis locus in ipsamet linea meridiana designandus.

Sit exemplum: Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani jussu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Francisco Blanchino ejusdem Pontificis Prælato domestico constructus anno 1702, in quo quidem altitudo muri usque ad foramen, per quod transit radius Solaris, est unciarum 750 pedis regii Parisiensis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inserta est. Fingamus hujus Zodiaci signa ♐ & ♒ (nam bina simul describuntur) esse a nobis inscribenda, seu quærendum esse punctum, quod Sol tangit, ubi signa illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem signorum est gr. 27. 48, *per Schol. Probl.* 5, eorumque complementum gr. 62. 12. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10. 2779915. Fiat ergo ut altitudo muri, prout est Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10. 2779915, ita eadem muri altitudo, prout est unciarum 750 Log-mus, ad Log-mum pro unciis quæsitis. Erit *per Schol.* 1. *&* 2. *Prop.* 14.

Complem. Tang. 10. 2779915
Unc. 750. *Log.* 2. 8750613

Summa 13. 1530528
Fit (*Cor.* 2. *Prop.* 14.) 3. 1530528, *dat unc.* 1422

Distabunt igitur signa ♐ & ♒ a principio lineæ meridianæ unciis 1422 pedis ejusdem Parisiensis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci signorum in ipsa linea meridiana locus designabitur.

APPENDIX

Praxeon Chronologicarum.

CUM tempus ex Aristotele *lib.* 4. *Physic. Cap.* 11. sit numerus, seu mensura motus secundum prius & posterius, non erit abs re hic praxes aliquot Cronologicas subjicere, quæ a numeratione temporis seu motuum Cœlestium Solis, & Lunæ maxime pendent, quas quidem non tam præclarum est scire, præsertim Ecclesiasticis viris, quam turpe nescire, id quod de Latina lingua inquit Cicero. Prænotandi igitur sunt primo termini aliquot Chronologici.

DEFINITIONES.

1. *Cyclus*, seu *Periodus* est certus annorum numerus in orbem rediens. Tres præsertim sunt Cycli, solaris, Lunaris, Indictionis.

2. *Cyclus Solaris* est intervallum annorum 28; quo evoluto, literæ Dominicales *A. B. C. D. E. F. G.* Calendario appositæ redeunt eodem ordine, quo antea, & ad easdem ferias.

3. *Cyclus Lunaris*, sive *aureus Numerus* est series annorum 19, qua completa, novilunia ad eundem diem regrediuntur. Dicitur *Numerus aureus*, quia Athenis in foro aureis literis quotannis inscribebantur ad novilunia indicanda,

4. *Indictio* est series annorum 15 in orbem rediens, post Constantini tempora, sive ab anno Christi 312, ut fama est, in usum recepta apud Græcos & Romanos; hoc discrimine, quod indictio

ctio Romana a Kal. Januariis, Græca vero a Kal. Septemb. initium ducit.

5. *Annus Julianus* a Julio Cæsare Dictatore dictus, qui Numæ regis annum emendavit, est dierum 365 hor. *6*, quæ quidem horæ *6* singulis quatuor annis horas 24, seu diem solidum constituunt. Itaque annus Julianus, qui constat diebus 365, dicitur *communis*; qui vero diebus 366 singulis quadriennìis, *Bissextilis* dicitur, quod scilicet dies sextus ante Kal. Martias bis numeretur, seu intercaletur, unde dies, & annus *intercalares* vocantur.

6. *Annus Grogorianus* est annus Julianus a Gregorio XIII. Pontefice anno 1582. correctus, 10 diebus subductis. Differt a Juliano in hoc, quod post annum Christi 1600. e singulis annis centesimis, qui omnes in Calendario Juliano bissextiles sunt, in Gregoriano tres primi, nempe 1700, 1800, & 1900 sunt communes, & solus quartus 2000 bissextilis erit.

7. *Epactæ* sunt dies undecim, qui addendi sunt ad annum lunarem, (qui constat diebus 354) ut adæquet annum solarem, qui est dierum 365, ut dictum est. Unde si hoc anno ex. gr. fuerit Epacta XI., sequenti anno erit XXII, sed tertio anno Epacta erit III. Nam quoties Epactæ hujusmodi additæ excedunt numerum 30, detrahitur numerus 30, & residuus numerus est Epacta illius anni. Si per additionem fiant 30, Epacta illius anni erit *, seu nihil.

8. *Periodus Victoriana*, seu *Dionysiana* est series annorum 532 e Cyclo Solari 28, in Cyclum Lunarem 19 multiplicato contexta, qua peracta, iidem Cycli Solis & Lunæ iterum redeunt. Dicitur *Victoriana*, quod a Victore Aquitano anno Christi

457 instituta sit, vel *Dionysiana* a Dionysio quodam *Exiguo*, qui ad Ecclesiam Romanam cum Alexandrina circa celebrationem Paschatis conciliandam, illam adhibuit.

9. *Periodus Juliana* est series annorum 7980, quæ ex Cyclorum Solis, Lunæ, & Indictionis multiplicatione oritur; sive est productum ex multiplicatione Periodi Victorianæ per Cyclum Indictionis, nempe annorum 532 $\times$ 15 $=$ 7980; in qua tres illi Cycli Solis, Lunæ, & Indictionis, qui in præsenti hoc anno conveniunt, in alio iterum non conveniunt nisi post annos 7980 expletos. Dicitur Juliana, quod Julianis annis constet. Est Periodus omnium præstantissima, quæ incœpit anno 710 ante Orbem conditum, & nondum est absoluta, a Josepho Scaligero excogitata.

10. *Epocha*, sive *Æra* est terminus, a quo anni numerantur. Sic Æra Christiana, qua nunc vulgo utimur, & vulgaris dicitur, numerat annos a Christi nativitate, seu potius ab ejus Circumcisione, hoc est a Kal. Januariis post orbem conditum annis 4004 juxta Cl. Usserii calculum.

Scol. I. *Loquimur hic de anno tam Solari, quam Lunari civili, qui ex integris diebus constant, non autem de anno Solari, aut Lunari Astronomico, qui præter dies, horas quoque & minuta prima, secunda, tertia &c. computat, quæ non sunt hujus loci.*

Scol. II. *Literæ Dominicales ordine retrogrado procedunt, nempe* G, F, E, D, C, B, A, *ut si hoc anno litera Dominicalis sit* G, *proximo anno erit* F, *tertio* E *&c. usque ad* A, *quam* G *iterum sequitur. Ratio est, quia cum annus Julianus communis constet diebus 365, hoc est hebdomadibus 52, & præterea die 1, si prima Januarii dies designetur litera* A, *etiam ultima Decembris eadem litera* A *designa-*

bi-

bitur. Sic igitur tam primus, quam ultimus illius anni dies Dominicus, subsequens annus inchoabitur feria II, dies autem Dominicus hujus anni incidet in diem Januarii septimum; proinde litera Dominicalis non erit B, *sed* G. *Tertius anni inchoabitur feria* III. *adeoque dies Dominicus cadet in diem 6 Januarii, & litera Dominicalis erit* F, *& sic de ceteris. Bissextilis autem annus duplici litera designatur, eodemque ordine retrogrado, scilicet* GF, FE, ED *&c. ita ut non* F, *sed* G *priorem locum obtineat, & ad diem usque 23 Februarii usurpetur, altera vero* F *deinceps usque ad finem totius intercalaris.*

PRAXIS I.

An datus annus sit Bissextilis, vel quotus sit a Bissextili, invenire.

ANnum Christi datum divide per 4; si facta divisione nihil remanet, ille annus Bissextilis est; si quis sit residuus, indicat, quotus annus sit a Bissextilis est. Sic annus, in quo hæc scribimus, 1748, quia divisus per 4, nihil remanet, est Bissextilis. Annus vero proximi Jubilæi 1750 erit secundus a Bissextili. Nam eo diviso per 4 remanent 2.

Coroll. Divisionis hujus quotus, residuo neglecto, indicat, quot effluxerint anni a Christo nato Bissextiles. Sic anno 1748 numerantur Bissextiles 437. Sed unitate mulctari debent propter annum 1700, qui Bissextilis non fuit ex dictis *Defin. 6.* Erunt ergo numerandi $437 - 1 = 436$.

PRAXIS II.

Cyclum solarem dati anni invenire.

ANno Christi proposito adde 9 (decimo namque hujus Cycli anno Christus natus est, adeoque jam novem erant expleti.) Tum summa illa dividatur per 28, numerus ex divisione residuus erit Cyclus Solaris anni dati. Si ex divisione nihil remanet, erit Cyclus Solaris completus 28. Quotus autem indicat revolutiones hujus Cycli a Christi nativitate peractas. Esto hic annus 1748, cui adde 9, fit 1757, quem divide per 28 remanent 21 pro Cyclo Solari currentis anni. Quotus autem 62 indicat totidem effluxisse a Christo nato Cyclos Solares.

PRAXIS III.

Aureum numerum dati anni invenire.

DAto Christi anno adde unitatem (nam primo Æræ Christianæ anno aureus numerus fuit 2, adeoque unus jam erat absolutus] summam deinde divide per 19, residuum erit numerus aureus. Si nihil remanet, erit Cyclus completus, sive annus 19. Quotus vero indicat, quot Cycli Lunares hactenus ab Æra Christiana fuerint. Quæritur numerus aureus currentis anni 1748. Adde 1, fit 1749, quem divide per 19, remanet 1 pro aureo numero quæsito. Sunt autem a Christo nato Cycli Lunares 92, ut divisionis quotus ostendit.

PRA-

PRAXIS IV.

In quam hebdomadæ feriam incidat primus anni dati dies, invenire.

AD annum Christi præcedentem addantur Bissextiles elapsi, & a summa subtrahantur 10. Tum numerus residuus dividatur per 7, id quod restat ex divisione dat feriam quæsitam. Si nihil remanet, erit feria septima, seu Sabbatum. Scire cupio ex. gr. in quam feriam cadet primus dies anni 1800. En calculi typus.

Annus præced.	1 7 9 9
Bissext. per Cor.	4 4 8
	2 2 4 7
Correc. Greg.	— 1 0
7	2 2 3 7

319 $\frac{4}{7}$ *resid.* 4. *indicat Fer.* IV.

Eadem ratione invenitur feria, in quam dato anno, incidit propositus cujuscunque mensis dies. Quæritur ex. gr. in quam feriam inciderit dies 17 Augusti anno 1740, in quo electus fuit Pontifex Maximus Benedictus XIV. Ad annum præcedentem addantur tum Bissextiles, qui *per Coroll. Prax.* 1. sunt 433, tum dies elapsi a Kal. Januariis usque ad diem 16 Augusti 1740, nempe 229, fit summa 2401, ex qua ob correctionem Gregorianam subductis 10, & residuo diviso per 7, remanent 4. Fuit ergo Feria IV.

Ann. præced.	1 7 3 9
Bissextiles	4 3 3
Dies elapsi	2 2 9
	2 4 0 1
Cor. Gregor.	— 1 0
7	2 3 9 1

341 $\frac{4}{7}$ *Res.* 4. *indicat Feria* IV.

PRAXIS V.

Literam Dominicalem dati anni invenire.

INveniatur Feria, qua annus propositus inchoatur *per prax. præc.*, eamque subtrahe ex 9, residuum dabit literam Dominicalem. Quæritur litera Dominicalis pro anno proximi Jubilæi 1750. Primus ejus dies *per prax. præc.* incidet in Feriam V., subtrahe 5 ex 9, residuum 4 dat literam Dominicalem quarto loco positam, ordine literarum directo numerandam, nempe *D.* Similiter scire volo literam Dominicalem anni 1755. Feria, in quam incidet primus ejus anni dies, erit *per Prax. præc.* Feria IV. Hanc subtrahe ex 9; residuum 5 dat literam Dominicalem *E* quinto loco positam.

Schol. *Aliæ sunt praxes pro litera Dominicali invenienda; sed hæc a Blondello allata, est omnium brevissima, atque pulcherrima.*

PRA-

PRAXIS VI.

Dati anni Epactam invenire.

INveniatur aureus numerus anni propositi *per Prax.* 3., qui multiplicetur per 11, & ex producto auferantur dies 11 pro correctione Gregoriana, residuoque diviso per 30, numerus, qui remanet, erit Epacta quæsita. Ex. gr. quæritur Epacta anni 1750, cujus numerus aureus *per Prax.* 3. est 3. Hunc duc in 11 fit 33, ablatisque 11, residuum est 22, quod cum dividi nequeat per 30, residuum ipsum 22 dat Epactam quæsitam. Anni autem currentis 1748 Epacta est * seu zero. Nam aureus numerus est 1, adeoque ex hac praxi 1 $\times$ 11 $=$ 1 $-$ 11 $=$ 0.

Schol. *Epactæ dati anni numerari incipiunt a Kal. Martiis ejusdem anni. Proinde Epacta hujus* 1748 $=$ 0 *durabit toto Februario anni* 1749.

PRAXIS VII.

Mense ac die datis, ætatem Lunæ invenire.

ADde simul Epactam currentis anni, dies mensis elapsos, & numerum mensium a Martio inclusive, & ex summa subtracto, si fieri possit 30, residuum dabit ætatem Lunæ. Scire volo ex. gr. ætatem Lunæ die 15 mensis Decembris hujus anni 1748. Cum ex dictis *in Prax. præc.* Epacta hoc anno sit $=$ 0, addantur tantum dies 15, & numerus mensium a Martio inclusive, nempe 10, summa 25 (ex qua 30 subtrahi nequeunt) dat Lunæ ætatem quæsitam. Similiter scire cupio æ-

tatem Lunæ die 4. Junii anni 1750. Epacta ejus anni *per Prax. 6.* est 22, cui adde dies 4 mensis Junii & insuper 4 pro numero mensium a Martio inclusive, fit summa 30, ex qua si subtrahantur 30, nihil remanet; est ergo illo die Novilunium.

PRAXIS VIII.

Datis mense & anni Epacta Novilunii diem invenire.

ADdatur ad Epactam anni dati numerus mensium a Martio inclusive, & summa subtrahatur ex 30; vel si summa illa superat 30, subtrahatur ex 60, residuum indicabit diem Novilunii. Quæritur ex. gr. in quotam Martii diem incidet Novilunium anno 1749. Ad Epactam ejus anni, quæ est 11 *per Prax. 6.* adde numerum mensium, qui est 1, & summa 12 subtrahatur ex 30, residuum 18 indicat Martii Novilunium die 18 futurum. Similiter quæritur Novilunium Decembris 1750. Ejus anni Epacta est 22 *per Prax. 6*, & numerus mensium a Martio inclusive 10. Horum summam 32 subtrahe ex 60, residuum 28 dat diem Novilunii.

Schol. I. *Quamquam autem ætas Lunæ per Epactas præcise definiri non possit, numquam tamen solido die a vera Lunæ ætate aberrat; proinde hæc methodus satis tuto in vulgarem usum recepta est.*

Schol. II. *Novilunium Paschale continetur intra diem 8 Martii & 5 Aprilis inclusive, intra quos terminos, qui Paschales audiunt, reperiri debet.*

PRA-

PRAXIS IX.

Dato Æræ Christianæ anno Indictionem invenire.

ANno Christi proposito adde 3, [primus enim Æræ Christianæ annus cœpit indictione quarta] & aggregatum divide per 15, residuum ex divisione dat annum Indictionis. Si nihil remanet, erit Indictio 15. Sic ad hunc annum 1748 additis 3, fit summa 1751, quæ divisa per 15, dat residuum 11 pro Indictione quæsita. Quotus autem 116 indicat Indictiones jam a Christo nato completas.

PRAXIS X.

Dato Æræ Christianæ anno, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.

ESto datus Christi annus præsens 1748, quæritur annus Periodi Julianæ, qui illi respondet. Anno dato 1748 adde 4713, summa 6461 dat annum quæsitum. Ratio est, quia primo Christi anno elapsi jam erant ejus Periodi anni 4713.

Coroll. Si datus quilibet Periodi Julianæ annus dividatur per 28, per 19, & per 15, residuum ex prima divisione erit Cyclus Solis, ex secunda Cyclus Lunæ, & ex tertia Cyclus Indictionis. Sic diviso anno currenti Periodi Julianæ 6461 per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari; per 19, remanet 1 pro Cyclo Lunari, sive aureo numero; per 15, remanent 11 pro Cyclo Indictionis.

PRAXIS XI.

Datò anno ante Christi Æram, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.

ESto datus annus ante Christum natum 4004, cui Usserius, Pagius, Lancellottus, aliique Chronologi illustres Mundi initium tribuunt, quæritur, quotus ille fuerit in Periodo Juliana. Auferatur datus annus 4004 ab annis Periodi Julianæ 4714, in quibus ex dictis *in Praxi præc.* primus Christi annus contigit, residuum dabit annum Periodi Julianæ, qui primo Mundi anno respondet, nimirum 710. Res per se patet.

Coroll. Hinc est, quod dato quolibet Periodi Julianæ anno, facile innotescit, an ille sit ante, vel post Christi nativitatem. Nam si datus annus major sit anno 4714, erit annus Periodi Julianæ post Christum; si minor, erit ante Christum natum. Sic datis Periodi Julianæ annis 6461, ablatisque ab illis Periodi Julianæ annis 4713, remanet præsens Æræ vulgaris annus 1748. Ablatis autem annis Periodi Julianæ 710 ab annis 4714, habentur anni 4004 ante Christi nativitatem.

PRAXIS XII.

Datis Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.

DUC Cyclos datos { *Solis* X 4845 / *Lunæ* X 4200 / *Indict.* X 6916

Et

Et summam productorum divide per 7980, residuus erit annus Periodi Julianæ, qui datis Cyclis respondet. Sit exemplum. Primus Christi annus habuit Cyclum Solis 10, Lunæ 2, & Indictionis 4, quæritur annus Periodi Julianæ, cui conveniunt.

Cycli	*Solis*	10 ×	4845 =	48450
	Lunæ	2 ×	4200 =	8400
	Indic.	4 ×	6916 =	27664
			Summa	84514

Quæ divisa per 7980, residuum 4714 dat annum Periodi Julianæ pro primo Christi anno.

Similiter hoc anno 1748 Cyclus Solis est 21, Lunæ 1, Indictionis 11, quæritur annus Periodi Julianæ.

Duc	21 ×	4845 =	191745
	1 ×	4200 =	4200
	11 ×	6916 =	76076
			182021

Quæ divisa per 7980, residuum 6461 dat annum Periodi Julianæ, qui ex *Prax.* 10. respondet huic anno 1748.

Schol. *Qua ratione numeri illi determinati* 4845, 4200, *&* 6916, *per quos dati Cycli multiplicari debent, inveniantur, non est hujus loci inquirere, cum methodo Analytica opus sit, quemadmodum ea usi sunt Franciscus a Schooten in Miscell., Præstetus T.* 2. *lib.* 7. *Element. Mathem., Joannes Keill lect.* 29. *de Cyclis, & alii.*

PRA-

PRAXIS XIII.

Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.

OLympiadum Epocha apud historicos, præsertim vero Græcos, celeberrima semper fuit, cum Græci annos nonnisi per Olympiades, unde anni Olympiaci dicti sunt, numerare solerent. Nam quadriennio quolibet vertente, seu quinto quovis redeunte anno, in Olympia Elidis Urbe ludos in honorem Herculis circa solstitium æstivum maximo populorum concursu celebrabant. Ludi autem hujusmodi ab Iphito Elidis rege sive primum instituti, sive instaurati sunt anno Per. Jul. 3938, & ante Christianam Æram anno 776.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur annus Olympiacus, qui illi respondet. Si datus annus minor sit annis 3938, ex his auferatur; qui remanet, dabit annos, qui Olympiadum Epocham præcedunt. Sit annus Per. Jul. 3103, in quo juxta Petavium Moyses natus est, quæritur quot annis ejus nativitas Olympiadum præcesserit institutionem. Subductis 3103 ex 3938, residuum 835 dat annos quæsitos.

Quod si datus sit Per. Jul. annus 4714, in quo incœpit Christiana Æra, ut sæpe dictum est, major scilicet annis 3938, hos ab illo subducito, residuum 776 dabit annos Olympiacos: qui si dividantur per 4, quotus dat Olympiades completas 194, & annum 1 Olympiadis ineuntis 195. Christus ergo natus est anno 1 ab Olympiade 194, sive anno primo Olympiadis 195.

Co-

Coroll. Dato Æræ Christianæ anno, ex. gr. 1748, si illi addas annos 776, habebis annos Olympiacos, qui huic anno respondent, 2524; quibus divisis per 4, habentur Olympiades 631. Simili ratione annus proximi Jubilæi 1750 erit secundus Olympiadis 632.

P R A X I S XIV.

Dato anno Olympiaco, quotus ille in Periodo Juliana sit, invenire.

DAta sit Olympias 115: qua ineunte, Alexander M., ut historici referunt, diem obiit, quæritur quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Multiplica Olympiades 113 elapsas per 4, & producto 452 adde unitatem, ob annum primum Olympiadis 114 ineuntis, fit 453, cui adjice 3937, aggregatum 4390 est annus Periodi Julianæ, in quo Alexander M. interiit.

Similiter Diodorus Siculus scribit, annum primum Olymp. 94 exeuntem, esse annum 780 post Trojæ excidium; scire volo, quotus ille esset Per. Jul. annus. Cum Trojanum excidium ex ejusdem Diodori Siculi, & Dionysii Halicarnassensis sententia acciderit anno Per. Jul. 3530, addantur anni post Trojæ casum elapsi 780 ad annos ipsos 3530, summa 4310 dabit annum Per. Jul., qui congruit cum anno 1 Olymp. 94.

Coroll. I. nota igitur, Trojæ excidium contigisse anno Per. Jul. 3530, ita ut primus annus Epochæ Trojanæ fuerit Per. Jul. annus 3431.

Coroll. II. Si ex anno Per. Jul. 4714, Æræ Christianæ primo, auferas 4390, residuum 324 dat annos, quibus Alexandri M. mors præcessit

sit Christi nativitatem. Sin ab eo auferas 3531, habebis annos Trojani excidii 1183 ante Christum natum. Quæ omnia *ex Coroll. Prax.* 11. plana sunt.

PRAXIS XV.

Dato anno Periodi Julianæ, annum U.C. ei congruentem invenire.

EX Historia Romana satis patet, Romanos ab Urbe condita annorum initium eorumque seriem numerare consuevisse: unde orta est celebratissima U. C. Epocha: Quæ quidem duplex est, *Varroniana* a M. Varonne dicta, quæ ædificationem Urbis in annum tertium Olympiadis VI. exeuntem refert, cui respondet annus Per. Jul. 3960, seu 3961 [cum Kal. Januariis sequentibus ea cœperit;] Christianam vero Epocham antecedit annis 753, ita ut in annum U. C. 754 cadat primus Christi annus; & *Capitolina* quæ a fastis Capitolinis collectis deducta fuit, & Urbem conditam in sequentem annum Per. Jul. 3962. rejicit. Sed Cor. Tacitus in suis Annalibus, Censorinus de die Natali, aliique viri docti, quorum sententiam sequimur, Epocham U. C. Varronianam Capitolinæ præferunt.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur quotus illi in Epocha U. C. annus congruat. Si propositus annus minor erit 3961, facta subtractione, residuum dabit annos ante Urbem conditam. Sic ab anno 3961 subductis 710 [cui Per. Jul. anno Usserius initium Mundi tribuit, ut dictum est] residuum 3251 dat Mundi annos ante U. C. Quod si major sit annis 3961, facta subtractione, residuum

duum dabit annos ab U. C. Sic subductis 3961 ex 4714 (primo Æræ Christianæ anno) residuum 753 dat annos U. C., qui præcedunt Christi nativitatem, quæ ex superius dictis incidit in annum U. C. 754.

PRAXIS XVI.

Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & Æræ Christianæ annos ei congruentes invenire.

REfert C. Plinius *Nat. hist. lib.* 8. *c.* 6. elephantos in Italia primum visos Pyrrhi regis bello anno Urbis quadringentesimo septuagesimo secundo; hinc.

1. Quæritur, quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Ad U. C. annos ante dictos 472 addantur anni 3960, qui U. C. Epocham præcesserunt ex dictis in *Prop. præc.*, aggregatum 4432 dat annum Per. Jul. quæsitum, ut patet.

2. Quæritur, in qua Olympiade, seu quoto anno Olympiaco illud acciderit. Ab anno Per. Jul. 4432, ut supra, invento, auferantur anni 3938, a quibus Olympiadum Epocha incœpit, residuum 494 dat annos Olympiacos, quibus divisis per 4, habetur annus secundus Olympiadis 124 per *Prax.* 13.

3. Demum quæritur, in quotum annum ante, vel post Christum natum Pyrrhi bellum, seu elephantorum in Italiam adventus inciderit. Ex anno Per. Jul. 4432 superius invento, facile intelligitur per *Coroll. Prax.* II. id ante Æram Christianam contigisse. Itaque idem Per. Jul. annus 4432 auferatur ab anno primo Christianæ Æræ

4714,

4714, residuus 282 dabit annos, qui Christianam Æram præcesserunt. Proinde elephantos Italia primum vidit anno Per. Jul. 4432, anno secundo ab Olympiade 123, post U. C. 472, ante Æram Christianam annis 282.

Coroll. Dato U. C. anno, sive anno Per. Jul. qui ei congruit, facile intelligitur, quotus ille sit a Trojæ excidio annus. Subductis enim Trojanæ Epochæ annis Per. Jul. 3630 (per *Cor.* 1. *Prax.* 14.) ab annis Per. Jul., qui in eadem Per. Jul. respondent U. C. annis, residuus erit annus quæsitus. Sit exemplum. Dato anno U. C. 537, in quo a Romanis clades maxima ad Trasimenum lacum accepta est, Flaminii Consulis temeritate, quæritur, quotus ille fuerit ab excidio Trojæ, seu Trojanæ Epochæ annus. Inveniatur annus Per. Jul. congruens U. C. anno 537, qui per *partem* 1. *hujus Prax.* erit 4497; ex hoc subducito Trojanæ Epochæ annos 3530 (per *Cor.* 1. *Prax.* 14.) residuum dat annos, qui intercesserunt, 967.

PRAXIS XVII.

Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, seu Neomeniam Thoth invenire.

De Æra Nabonassari crebra fit mentio tum apud veteres Astronomos Ptolemæum, Hipparchum & alios, tum etiam apud celebriores Chronologos: proinde a nobis ea hic omitti omnino non potest. Fuit Nabonassarus Chaldæorum Rex, a cujus regni initio Babylonii novam Epocham instituerunt, quam Ægyptii ab illis accepe-

perunt. Exordium ejus cadit in Per. Jul. annum 3967, die 16. Februarii ante Christum natum 749.

Quia vero Nabonassari Æra non annis Julianis, sed Ægyptiacis constat, de his primo eorumque initio agendum est. Annus Ægyptiacus dies 365 continet, neglectis 6 illis horis, quibus annus Julianus præter dies 365, componitur. Unde sicut, propter omissam quadriennio quolibet vertente diem intercalarem, initium anni Ægyptiaci (quod neomenia Thoth dicitur) retro abeat, & per totum annum Julianum vagetur, unum perpetuo anticipans diem ut si hoc anno ex. gr. neomenia Thoth incipiat Calendis Januariis, post quatuor annos incipiet die 31. Decembris, & iterum post alios quatuor annos, die 30 Decembris, & sic deinceps; donec demum anno 1461. ad Calendas Jan. rursus redeat, expletis scilicet annis Julianis 1460, qui annos Ægyptiacos 1461 præcise continent.

In tota autem Periodo Juliana sunt quinque anni, qui spatio annorum 1460 invicem distant, in quibus tam primo Januarii die, quam ultimo decembris neomenia Thoth contingit, nempe

1273, 2733, 4193, 5653, 7113.

Dato igitur Per. Jul. anno, inveniri debeat, quoto die initium anni Ægyptiaci, seu Thoth incipiat. Hæc erit regula. Subducatur annus Per. Jul. ex uno ex superioribus numeris, qui sit proxime major dato, & residuum dividatur per 4. Si quotus minor fuerit quam 59, vel aliquid post divisionem supererit, addatur quoto unitas, dabit sum-

summa diem neomeniæ Thoth a Calendis Januariis in anno Juliano numerandum. Si a divisione nihil restat, & quotus est major 59, ipse dabit diem, in quem incidet neomenia Thoth. Sit exemplum. Esto datus annus Per. Jul. 4714, in quo Christi dies natalis illuxit, quæritur, in quoto illius anni die neomenia Thoth contigerit. Subductis anni 4714 a numero proxime majori 5653, remanent 939, quibus divisis per 4, quotus dat 234, & remanent 3. Adde 1 ad ipsum quotum. Cœpit igitur Thoth die 235 a Calendis Januariis numerandum, hoc est die 23 Augusti. Similiter scire volo in quotum anni 1748 diem incidat initium anni Ægyptiaci, seu Thoth. Annus Per. Jul., qui huic anno congruit, est 6461 per *Prax.* 11. hunc subtrahe ex 7113 proxime majori, & residuum 652 divide per 4, quotus dat 162 sine ullo residuo. Huic (ob Correct. Gregorianam) adde 11, fit aggregatum 174. Hoc igitur anno 1748 initium anni Ægyptiaci contigit die 23 Junii, diebus scilicet 174 a Cal. Januariis.

Demum datus sit Periodi Julianæ annus 3965, in quo Tobias senior natus esse dicitur, & quæratur ejus anni neomenia Thoth. Subducto 3965 ex 4193 remanent 228, quem numerum si dividas per 4, habebis 57, & nihil remanet. Quia vero hic numerus minor est quam 59, nempe quam dies ultimus Februarii, in quo additur bissextilis dies, ad 57 addenda est unitas, & habetur dies quinquagesimus octavus, in quem cadet neomenia Thoth, nempe dies 27 Februarii.

Schol. *Ex secundo exemplo patet, post Christi annum* 1582, *neomenia Thoth diem in anno Juliano inventum addendos esse, ob Correct. Gregorianam, dies* 10 *usque ad annum* 1700, *&* *ab anno* 1700 *usque*

que ad 1800 *dies* 11.

PRAXIS XVIII.

Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in Æra Nabonaſſari ſit, invenire.

OBſerventur quinque ſequentes anni Per. Jul. *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; quorum primus initium dedit Epochæ Nabonaſſari, reliqui vero annos Nabonaſſareos ſinguli inchoant, ut in *Prax. præc.* explicavimus, eodemque intervallo annorum 1460 invicem diſtant.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
	1	2	3	4
3967.	4193.	5653.	7113.	8573.

Dato igitur quovis Per. Jul. anno, videatur ad quodnam intervallum ſpectet, ſive quonam numerorum *A*, *B*, *C*, &c. ſit proxime minor. Tum additis unitatibus, quæ illi intervallo reſpondent, dematur ex aggregato primus terminus *A*, id quod remanet indicabit quotus ſit annus in Æra Nabonaſſari quæſitus. Eſto annus Per. Jul. 4714, qui, ut ſæpe diximus, fuit humanæ ſalutis exordium. Hic ad intervallum ſecundum pertinet, cum ſit major *B*, minor *C*; adde igitur 2 ad 4714, & ex ſumma 4716 deme numerum 3967, reſiduum dat 749. Ergo Chriſtus natus eſt Nabonaſſari anno 749.

Ea-

Eadem ratione ſcire cupio, quotus Nabonaſſari annus ſit ipſe, qui labitur annus 1748. Cum hic *ex Prax.* 11. ſit annus Per. Jul. 6461, major autem ſit termino *C*, minor vero *D*, ſpectat ad intervallum 3. Adde ergo illi tres unitates, & ex ſumma 6464 tolle terminum *A*, reſiduus numerus 2497 dat annum Nabonaſſareum, qui cum hoc anno Æræ Chriſtianæ 1748 congruit.

Ratio regulæ patet ex dictis. Nam quodlibet intervallum eſt annorum 1460. Anni autem Juliani 1460 continent annos Ægyptiacos 1461, & unumquodque intervallum annum unum auget; proinde Per. Jul. anni, qui ex annis Julianis conſtant, augeri debent tot unitatibus, quot ſunt intervalla, ut inter ipſos & annos Ægyptiacos, ſeu Nabonaſſareos habeatur æquatio.

PRAXIS XIX.

Nabonaſſari annos in Per. Jul. annos convertere.

NOtentur ſequentes numeri *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, earumque intervalla 1, 2, 3, 4, & videatur ad quod ex illis pertineat Nabonaſſari annus propoſitus, ab eoque tot demantur unitates, quot illi intervallo conveniunt. Tum reſiduo addantur anni 3967, qui initio Æræ Nabonaſſari tribuuntur, ſumma erit annus Per. Jul. quæſitus.

A.	*B.*	*C.*	*D.*	*E.*
1	2	3	4	
1.	227.	1688.	3149.	4610.

Sit exemplum. Ptolemæus lib. 5. pag. 125. refert Lunam defecisse anno quinto Nabopollassari, qui est 127 a Nabonassaro; quæritur, quoto Per. Jul. anno id acciderit. Cum annorum numerus 127 ad intervallum 1 spectet, utpote major *A*, minor vero *B*, auferatur ab eo 1, & residuo 126 addatur 3967, summa 4093 est annus Per. Jul. quæsitus.

Similiter quæritur, quotus sit in periodo Juliana annus Nabonassari 2497. Patet hunc numerum pertinere ad intervallum 3, cum sit proxime major *C*, minor vero *D*. Auferantur igitur ab eo tres unitates, & residuo 2494 addatur numerus 3967; summa 6461 est annus Per. Jul., qui congruit cum anno Nabonassareo dato 2497. Quod *ex Prax. præced.* satis apparet. Est autem hæc regula conversa præcedentis, ut patet.

P R A X I S XX.

In anno Nabonassari feriam invenire.

Restat, ut ferias in anno Nabonassareo investigemus, quod in hujusmodi annis supputandis, & cum aliis mutuo connectendis, sæpe fieri expedit.

Anno primo Nabonassari neomenia Thoth incidit in feriam IV, proinde si ad datum Nabonassari annum addas 3, & summam dividas per 7, nu-

numerus reliquus dabit feriam, in quam cadit Neomenia Thoth. Si nihil remanet, erit Sabbatum. Hic annus 1748 ex dictis in *Prax.* 18, dat in Æra Nabonassari annum 2497, si addantur 3, & summa 2500 dividatur per 7, remanet 1. Incidit ergo neomenia Thoth hujus anni in fer. 1., hoc est in diem Dominicum 23. Junii, ut in *Prax.* 17 vidimus.

Atque hic finis esto Appendicis hujus Chronologicæ Idib. Decemb. anni Per. Jul. 6461, Olympiade 631, anno ab U. C. 2501, Nabonassari 2497, Æræ Christianæ 1748, in honorem Dei Opt. Max. & studiosæ juventutis utilitatem.

FINIS.

N.R.